МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

Ю. В. Ситникова

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

(для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання спеціальності 241 – Готельно-ресторанна справа)

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2017

Ситникова Ю. В. Вища математика : конспект лекцій з дисципліни (для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання спеціальності 241 – Готельно-ресторанна справа) / Ю. В. Ситникова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 158 с.

Автор : канд. пед. наук Ю. В. Ситникова

Рекомендовано для студентів спеціальності 241 – Готельно-ресторанна справа. Конспект містить теоретичні відомості, приклади розв'язання завдань з основних розділів вищої математики та задач прикладного характеру.

Рецензент канд. фіз.-мат. наук, доц. Л. Б. Коваленко

Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол № 1 від 31 серпня 2017 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Конспект лекцій розроблено згідно програми нормативної навчальної дисципліни «Вища математика» та робочої навчальної програми підготовки бакалавра за спеціальністю 241 – Готельно-ресторанна справа, який розраховано для студентів денної та заочної форми навчання.

Теоретичний матеріал структуровано та узгоджено з аудиторними лекційними заняттями, що проводяться під час вивчення модуля «Вища математика».

Конспект лекцій містить стислий теоретичний матеріал необхідний студентам для засвоєння основних знань з вищої математики. В конспекті розміщено значну кількість прикладів розв’язання типових задач, а також задач прикладного характеру, спрямованих на практичне застосування та закріплення отриманих знань для вирішення професійно-орієнтованих задач.

У додатках, наприкінці конспекту лекцій, розташовані додаткові відомості та матеріали.

Для більш поглибленого вивчення та пошуку довідникової інформації подано посилання на джерела, в яких можна знайти більш детальну інформацію про ті або інші математичні положення або доведення теорем, оскільки вони не були представлені у цьому конспекті.

ЛЕКЦІЯ 1

План лекції

1. Поняття визначника. Правила його обчислення. Властивості визначників.

2. Матриці. Дії над матрицями. Поняття оберненої матриці та алгоритм її знаходження.

3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язок системи. Методи знаходження розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

4. Лінійні моделі «витрати-випуск» та їх використання для аналізу економічної діяльності закладів сфери обслуговування.

1 Поняття визначника. Правила його обчислення. Властивості визначників

Визначником називають число записане у вигляді квадратної таблиці. Елементом визначника є число, яке позначають a_{ij}, де нижні індекси i та j вказують на місцезнаходження цього елементу у таблиці чисел. Індекс i – це номер рядка, в якому розташований елемент a_{ij}, індекс j – номер стовпця. Записують визначник як таблицю чисел у прямих дужках. Позначають визначник Δ_n, індекс n вказує порядок визначника. *Порядком* визначника вважають кількість рядків (або ж стовпців, оскільки їх кількість однакова) у цьому визначнику. Наприклад, $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}$ є визначником другого порядку і його можна позначити

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}$. Якщо кажуть, що число 3 є елементом визначника Δ_2, який стоїть у першому рядку, другому стовпці, то позначають це так: $a_{12} = 3$. $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & -7 & 3 \end{vmatrix}$ є визначником третього порядку. Кількість елементів визначника дорівнює n^2. У цьому можна пересвідчитись, звернувши увагу на попередні приклади: у визначника другого порядку 4 елементи, а у визначника третього порядку їх 9.

Визначник $n-го$ порядку (тобто довільного порядку) виглядає так:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Головною діагоналлю визначника називається діагональ, яка складається з елементів $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$. Іншу діагональ називають побічною.

Визначник другого порядку обчислюється за таким правилом:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12},$$

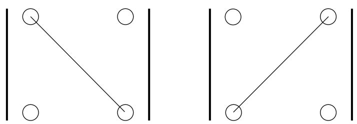
тобто елементи визначника перемножуються хрест на хрест, а потім отримані добутки віднімаються.

Визначник третього порядку обчислюється так:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

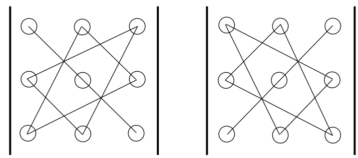
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$$

схематично зазначені правила можна зобразити так:



"+"   "-"

Рисунок 1



"+"   "-"

Рисунок 2

На рисунку 1 схема обчислення визначника другого порядку, а на рисунку 2 – третього порядку, яке називають «правилом зірочки», або «правилом трикутників», також воно відомо як правило Сарюса.

Приклад 1. Обчислити $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

Розв'язання: $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \cdot 5 +$

$$+(-1) \cdot 4 \cdot (-2) - 5 \cdot (-2) \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) \cdot (-2) - 3 \cdot 4 \cdot 2 =$$

$$= -8 + 45 + 8 - 20 - 6 - 24 = -5 .$$

Для того щоб розглянути питання обчислення визначника будь-якого порядку, введемо такі поняття, як мінор та алгебраїчне доповнення.

Мінором будь-якого елемента a_{ij} називають визначник, який отримано завдяки викресленню в заданому визначнику того рядка та стовпця на перехресті яких цей елемент знаходиться. Позначають його M_{ij}. Наприклад, знайдемо мінор M_{23} у заданому визначнику $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & -7 & 3 \end{vmatrix}$. Згідно представленому вище означенню для його отримання необхідно викреслити другий рядок й третій стовпець, тож у результаті матимемо $M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -7 \end{vmatrix}$.

Зауваження 1. У визначнику другого порядку $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, наприклад, мінором елементу a_{11} буде елемент a_{22}, який можна вважати визначником першого порядку, та який отримано завдяки викресленню першого рядка та першого стовпця.

Алгебраїчним доповненням (позначають A_{ij}) елемента a_{ij} називають число, яке обчислено за такою формулою:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}, \tag{1}$$

тобто це є мінор, знак якого залежить від парності чи непарності суми індексів цього елементу. Наприклад, знайдемо алгебраїчне доповнення A_{22} та A_{32} визначника $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & -7 & -1 \\ 8 & -5 & 0 \\ -2 & 7 & 4 \end{vmatrix}$. Для цього скористаємось формулою (1).

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22}$, де M_{22} мінор, який знайдемо як вище зазначено: $M_{22} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 - (-1) \cdot (-2) = -2$. Отже, $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-2) = -2$. Знайдемо тепер алгебраїчне доповнення A_{32}:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -(0 \cdot 0 - 8 \cdot (-1)) = -8.$$

Обчислення визначників будь-якого порядку виконують за допомогою їх розкладання за елементами рядка (або стовпця) (*теорема Лапласа*), тобто: визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпця) на їх алгебраїчне доповнення.

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} \text{ або } \Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj}. \qquad (2)$$

Приклад 2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

Розв'язання: Обчислимо визначник четвертого порядку, розклавши його за елементами першого стовпця. Згідно формули (2) матимемо таке розкладання:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot A_{11} + 3\cdot A_{21} + 1\cdot A_{31} + 1\cdot A_{41} =$$

$$= 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(6+20-4-6-2+40) + 3\cdot(-1)\cdot 0 + 1\cdot 0 +$$

$$+1\cdot(-4+20+6-2-6+40) = 108 + 54 = 162\ .$$

Властивості визначників:

1. Величина визначника не зміниться, якщо замінити усі елементи його рядків відповідними елементами стовпців.

2. Якщо поміняти місцями два рядка (стовпця), то знак визначника зміниться на протилежний.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 9 & -5 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 9 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

3. Визначник дорівнює нулю, якщо він містить рядок (стовпчик) з нульовими елементами.

4. Визначник дорівнює нулю, якщо він містить два однакових або пропорційних рядки (стовпці). (Зверніть увагу на приклад 2).

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -7 \\ -15 & -3 & 21 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

5. Множник, спільний для елементів деякого рядка (стовпця), можна винести за знак визначника.

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 4 \\ 8 & 1 & -7 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & -7 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

6. Якщо елементи деякого рядка (стовпця) визначника представити у вигляді суми двох доданків, то цей визначник дорівнюватиме сумі двох визначників.

Ця властивість матиме такий вигляд:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 12 & -2 & -1 \\ 5 & 11 & -7 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5+7 & -2 & -1 \\ 3+2 & 11 & -7 \\ -3+1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 3 & 11 & -7 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & -2 & -1 \\ 2 & 11 & -7 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \cdot$$

7. Величина визначника не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця) помножені на одне й те саме число, яке не дорівнює нулю.

Перевіримо цю властивість на прикладі обчислення заданого визначника $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -7 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$:

1) до першого рядка додамо другий рядок, помножений на 2, та обчислимо за правилом трикутника:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -7 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+5\cdot 2 & -1+1\cdot 2 & 4+(-7)\cdot 2 \\ 5 & 1 & -7 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 1 & -10 \\ 5 & 1 & -7 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 60+14-150-20-25+252=131;$$

2) обчислимо визначник за правилом трикутника:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -7 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10-14+60+8+25+42=131.$$

Зауваження 2. Елементами визначника можуть бути не тільки числа, а й об’єкти іншої природи.

Приклад 3. Розв’язати рівняння $\begin{vmatrix} x & -2 & 2 \\ 1 & x & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Розв’язання: Скористаємось правилом трикутників:

$$\begin{vmatrix} x & -2 & 2 \\ 1 & x & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = x^2+2-2-2x+2-x,\ x^2+2-2-2x+2-x=0,$$

$$x^2-3x+2=0,\ D=9-4\cdot 2=1,\ x_{1,2}=\frac{3\pm 1}{2},\ x_1=2,\ x_2=1.$$

2 Матриці. Дії над матрицями. Поняття оберненої матриці та алгоритм її знаходження

Матриця – це прямокутна таблиця чисел. Якщо в матриці m рядків та n стовпців, то кажуть, що вона має розмірність $m\times n$. Якщо в матриці лише один стовпчик і m рядків, то її називають *матриця-стовпець*; якщо в матриці лише один рядок та n стовпців – *матриця-рядок*. Матрицю, в якій кількість рядків дорівнює кількості стовпців, називають *квадратною* матрицею. *Симетричною* матрицею називають квадратну матрицю, в якій елементи, що розташовані симетрично відносно головної діагоналі, рівні, тобто $a_{kl} = a_{lk}$. *Діагональною* матрицею називають квадратну матрицю в якій усі елементи, крім тих, що знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю. *Одиничною* матрицею називається діагональна матриця, діагональні елементи якої є одиниці, позначають її буквою E, має вигляд: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Матриці A і B називаються *рівними*, якщо вони мають однаковий розмір $m \times n$ і їх відповідні елементи рівні

$$A_{m\times n} = B_{m\times n} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}, \; i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,n} \; .$$

Над матрицями виконують такі дії :

1. Множення матриці на число. Для цього необхідно кожен елемент матриці помножити на задане число, наприклад, знайти матрицю $C = 4A$, якщо дана матриця

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -8 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \text{ тоді } C = 4A = 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -8 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 4 & -4\cdot 4 & 2\cdot 4 \\ -8\cdot 4 & 1\cdot 4 & 5\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -16 & 8 \\ -32 & 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

2. Додавання (віднімання) матриць. При цьому додаються (або віднімаються) відповідні елементи матриць. Слід звернути увагу, що ця дія може виконуватися лише в тому випадку, коли матриці-доданки мають однакову розмірність.

Наприклад, знайти суму матриць A і B, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -8 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -7 & 5 & -4 \\ -8 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$A+B=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -8 & 1 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -7 & 5 & -4 \\ -8 & 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-7 & -4+5 & 2-4 \\ -8-8 & 1+3 & 5+2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -16 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Підкреслимо, що дія додавання є комутативною, тобто

$$A+B=B+A.$$

3. Множення матриць. Виконувати цю дію можна лише за умови, що кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці. Матриця-результат має кількість рядків як у першої матриці, а стовпців – як у другої матриці; тобто: $A_{m\times k}\cdot B_{k\times n}=D_{m\times n}$. Елементи цієї матриці отримують як суму добутків елементів рядка першої матриці на відповідні елементи стовпця другої матриці.

Приклад 4. Знайти добуток матриць : $A\cdot B$ та $B\cdot A$:

а) $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$.

Розв'язання: а) $A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 5\\ 0 & -8\end{pmatrix}$ множення цих матриць виконувати не можна, бо кількість стовпців першої матриці 3, а кількість рядків другої матриці 2; а ось добуток $B\cdot A$ існує, знайдемо його:

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}7 & 5\\ 0 & -8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}7\cdot3+5\cdot2 & -1\cdot7+5\cdot(-2) & 7\cdot1+5\cdot3\\ 0\cdot3+(-8)\cdot2 & 0\cdot(-1)-8\cdot(-2) & 0\cdot1+(-8)\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31 & -17 & 22\\ -16 & 16 & -24\end{pmatrix};$$

б) $A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 5\\ 0 & -8\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot7+(-4)\cdot0 & 3\cdot5+(-4)\cdot(-8)\\ 2\cdot7+(-1)\cdot0 & 2\cdot5+(-1)\cdot(-8)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & 47\\ 14 & 18\end{pmatrix},$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}7 & 5\\ 0 & -8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}7\cdot3+5\cdot2 & 7\cdot(-4)+5\cdot(-1)\\ 0\cdot3+(-8)\cdot2 & (-4)\cdot0+(-1)\cdot(-8)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31 & -33\\ -16 & 8\end{pmatrix}.$$

Як бачимо множення матриць не є комутативним, тобто $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Зауваження 3. Зазначимо деякі властивості добутку матриць:

1) $AE=A$; $EA=A$; 2) $(AB)C=A(BC)$;

3) $A(B+C)=AB+AC$; 4) $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$;

5) для квадратних матриць A і B справедливо

$$\det(AB)=\det(BA)=\det A\cdot\det B.$$

Якщо в матриці A поміняти місцями відповідні рядки і стовпці, то отримаємо *транспоновану* матрицю A^T. Така операція переходу від матриці A до матриці A^T називається *транспонуванням*.

Приклад 5. Транспонувати задану матрицю A

$$A=\begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^T=\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Кожній квадратній матриці A n-го порядку ставиться у відповідність визначник

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

який називається *визначником* (*детермінантом*) матриці A.

Якщо визначник матриці A дорівнює нулю, тобто $\det A=0$, то матриця називається *виродженою* (*особливою*).

Якщо визначник матриці A відмінний від нуля, тобто $\det A\neq 0$, то матриця називається *невиродженою* (*неособливою*).

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до невиродженої квадратної матриці A, якщо виконується умова

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

Теорема. Для будь-якої невиродженої квадратної матриці A n-го порядку існує єдина обернена матриця

A^{-1}, яка обчислюється за формулою

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A. (Без доведення).

Для знаходження оберненої матриці слід використовувати такий алгоритм знаходження оберненої матриці:

1. Обчислити визначник матриці $\det A$. Якщо він не дорівнює нулю, то обернена матриця існує.
2. Транспонувати матрицю, A^T.
3. Обчислити усі алгебраїчні доповнення транспонованої матриці та скласти приєднану матрицю A^*
4. Знайти обернену матрицю: $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot A^*$
5. Перевірити рівність $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Приклад 6. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання: Обчислимо її визначник

$\det A=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$, отже матриця невироджена та обернена їй існує. Транспонуємо задану матрицю

$A^T=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Знайдемо усі її алгебраїчні доповнення та запишемо обернену матрицю:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1, \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{13}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3, \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2, \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4,$$

$$A_{31}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1, \qquad A_{32}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1, \qquad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 3\\ 0 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Виконаємо перевірку:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 3\\ 0 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв’язок системи. Методи знаходження розв’язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система m *лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з* n *невідомими* x_j $(j=\overline{1,\,n})$ має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

де a_{ij} $(i=\overline{1,m}\,;\;\; j=\overline{1,\,n})$ і b_i $(i=\overline{1,\,m})$ – задані числа:

a_{ij} $(i=\overline{1,m}\,;\;\; j=\overline{1,\,n})$ – *коефіцієнти* при невідомих;

b_i $(i=\overline{1,\,m})$ – *вільні члени* (*праві частини*).

Система, в якій число рівнянь дорівнює числу невідомих n, називається *квадратною* n*-го порядку*.

Для квадратної системи визначник Δ_n, складений з коефіцієнтів при невідомих, називається *визначником системи*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},\;\; \Delta_n = \det A.$$

Система називається *однорідною*, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю $b_i = 0$ $(i=\overline{1,\,m})$, і – *неоднорідною*, якщо хоча б один з вільних членів відмінний від нуля.

Система називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв’язок, і *несумісною* (*суперечливою*), якщо вона не має жодного розв’язку.

Однорідна СЛАР завжди сумісна, бо має тривіальний (нульовий) розв’язок $x_j = 0$ $(j=\overline{1,\,n})$.

Сумісна система називається *визначеною*, якщо її розв’язок єдиний, і *невизначеною* – в протилежному випадку.

Введемо матричні позначення

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}; \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A}=\left(A \,\vdots\, B\right)=\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ {}_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

де X – *матриця-стовпець невідомих* розміру $n\times 1$; A – *основна матриця* системи, складена з коефіцієнтів при невідомих розміру $m\times n$; B – *матриця-стовпець вільних членів* (*правих частин*) розміру $m\times 1$; $\tilde{A}$ – *розширена матриця* системи розміру $m\times(n+1)$. Тоді СЛАР можна подати в матричній формі: $A\cdot X=B$.

Якщо в СЛАР кількість рівнянь відповідає кількості невідомих (кажуть: квадратна система), то для пошуку її рішення можна застосувати матричний метод. Розглянемо його.

Оскільки СЛАР можна подати в вигляді матричного рівняння: $A\cdot X=B$, то спробуємо його розв’язати. Оскільки матриця A – невироджена, то існує обернена матриця A^{-1}. Помножимо обидві частини матричного рівняння на A^{-1} ліворуч, отримаємо

$$A^{-1}\cdot AX=A^{-1}\cdot B.$$

Враховуючи, що $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ матимемо

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Це й є шуканий розв'язок. Отже, щоб розв'язати СЛАР матричним методом необхідно виконати наступні дії: по-перше, знайти обернену матрицю A^{-1} до основної матриці системи A; по-друге, помножити знайдену A^{-1} на стовпець вільних членів B.

Приклад 7. Розв'язати матричним методом систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}.$$

Розв'язання. Запишемо основну матрицю системи та відшукаємо обернену до неї (дивись алгоритм знаходження оберненої матриці):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \ \det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ A_{11} = -1, \ A_{12} = 5, \ A_{13} = -3, \ A_{21} = 1,$$

$$A_{22} = 7, \ A_{23} = -5, \ A_{31} = 1, \ A_{32} = -1, \ A_{33} = -1.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 7 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \; A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 7 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 7 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \; x_1 = 1, \; x_2 = 0, \; x_3 = -2 .$$

Зробимо перевірку. Підставимо знайдені значення x_1, x_2, x_3 в одне з рівнянь системи (або підставляють в усі рівняння), наприклад, у друге рівняння: $1 - 0 + 2 \cdot (-2) = -3$. Ми отримали тотожність. Тож, знайдені значені x_1, x_2, x_3 є правильними.

Також, для пошуку рішення СЛАР, якщо вона квадратна, застосовують метод Крамера, який інколи називають методом визначників.

Теорема *(правило Крамера)*. Якщо визначник квадратної системи відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок, який обчислюється за формулою

$$x_j = \Delta_j / \Delta \;\; , \qquad j = \overline{1, n} \; ,$$

де Δ – головний визначник системи, складений з коефіцієнтів рівнянь системи a_{ij} при невідомих x_j;

де Δ_j – допоміжний визначник, одержаний з основного визначника Δ заміною j-го стовпця стовпцем вільних членів

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Приклад 8. Розв'язати квадратну систему методом Крамера

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases}.$$

Розв'язання. Обчислимо головний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 56 \neq 0.$$

Обчислимо допоміжні визначники

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ 3 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 112, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 168,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 56.$$ Знайдемо невідомі x_1, x_2, x_3:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{112}{56} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{168}{56} = 3, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{56}{56} = 1.$$

Перевірка: $5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 1 = 2$, $2 = 2$.

Пошук рішення довільної прямокутної СЛАР доцільно проводити *методом Гауса.* Розглянемо довільну прямокутну систему, в якій m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими x_j $\left(j=\overline{1, n}\right)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Нехай A – основна матриця, а $\tilde{A}$ – розширена матриця цієї системи, яка складена доповненням основної матриці стовпцем з вільних членів. Елементарним перетворенням рядків розширеної матриці $\tilde{A}$ і переставленню стовпців тільки основної матриці A відповідають наступні рівносильні перетворення лінійної системи:

1) переставлення місцями будь-яких двох рівнянь (перенумеровування рівнянь);

2) множення обох частин будь-якого рівняння на довільне ненульове число;

3) додавання до обох частин будь-якого рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на довільне число;

4) перенумеровування невідомих.

Дослідження і розв’язання СЛАР методом Гауса складається з двох етапів.

Перший етап (його називають *прямий хід*) методу Гауса, полягає в тому, що розширену матрицю $\tilde{A}$ завдяки застосуванню елементарних перетворень приводять до східчастого вигляду.

Східчастий вигляд матриці – це такий вигляд матриці, при якому всі елементи матриці, що знаходяться під головною діагоналлю, дорівнюють нулю.

Для того, щоб досягти такого вигляду, потрібно виконувати послідовне вилучення невідомих за допомогою вказаних рівносильних перетворень системи. Спочатку виділяють перше рівняння і відповідно перше невідоме. Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Якщо ця умова не виконується, то переставляють рівняння і/або перенумеровують невідомі так, щоб цей коефіцієнт був відмінний від нуля. Потім поступово додають перше рівняння до другого рівняння, потім до третього рівняння і т.д. до останнього, помножені на деякі множники. Ці множники підбирають так, щоб під час додавання перших коефіцієнтів, у кожному випадку, було отримано нуль. Потім виділяють друге рівняння і відповідно друге невідоме. Повторюють процедуру додавання другого рівняння до всіх інших, дотримуючись при цьому поради, щоб під час додавання других коефіцієнтів, у кожному випадку, було отримано нуль. Продовжуємо з усіма рівняннями системи. Цей процес продовжують до тих пір, доки не дійдуть до останнього найнижчого рівняння або ситуації, коли виділене рівняння та всі рівняння, що лежать нижче нього, мають тільки нульові коефіцієнти при невідомих.

Якщо під час перетворень матриця набула трикутного вигляду (рисунок 3), то система визначена сумісна і має один єдиний розв’язок. Його знаходять завдяки другому етапу методу Гауса – *зворотній хід*. Для цього отриману матрицю записують знову у вигляді системи рівнянь та розв’язують «знизу вгору», починаючи з останнього рівняння, яке є звичайним лінійним рівнянням. Знайдене значення x_k підставляють у попереднє рівняння та знаходять x_{k-1} і т. д. і т. п.

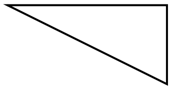


Рисунок 3

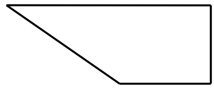


Рисунок 4

Якщо в результаті перетворень, матриця набула трапецієвидного вигляду (рисунок 4), то система невизначена сумісна і має безліч розв'язків. Тоді відкидають нульові рівняння (тотожності $0=0$). В праву частину переносимо всі члени, що містять вільні невідомі. Одержуємо систему верхнє трикутної форми (рисунок 3) відносно базисних невідомих (дивись додаток А) та розв'язуємо, підіймаючись знизу вгору. Спочатку з останнього рівняння знаходять останнє базисне невідоме x_k. Потім одержане значення x_k підставляють у передостаннє рівняння і визначають з нього x_{k-1} і т.д., доки не знайдуть x_1.

Приклад 8. Розв'яжемо систему рівнянь з прикладу 6 методом Гауса та порівняємо відповіді.

Розв'язання. Запишемо поширену матрицю системи

$$\begin{cases} 5x_1-3x_2+x_3=2 \\ 3x_1+x_2-5x_3=4 \\ x_1-2x_2+7x_3=3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 7 & 3 \end{array}\right)$$

Для зручності поміняємо місцями перший та третій рядок. Вилучимо перші коефіцієнти з першого стовпця, які розташовані нижче першого рядка. Для цього будемо додавати перший рядок, помножений на (-3), до другого. Потім вилучимо коефіцієнти з другого стовпця, які розташовані нижче першого рядка. Тепер додамо перший рядок, помножений на (-5), до третього. Виконуємо дії послідовно. У результаті матимемо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 7 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 4 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 1+(-2)\cdot(-3) & -5+7\cdot(-3) & 4+3\cdot(-3) \\ 5 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 7 & -26 & -5 \\ 0 & -3+(-2)\cdot(-5) & 1+7\cdot(-5) & 2+3\cdot(-5) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 7 & -26 & -5 \\ 0 & 7 & -34 & -13 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 7 & -26 & -5 \\ 0 & -7+7 & 26-34 & -13+5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 7 & -26 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{array}\right)$$

Отримана матриця має трикутний вигляд, отже, система матиме один єдиний розв’язок, який ми й знайдемо. Складемо та розв’яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 3 \\ 7x_2 - 26x_3 = -5 \\ 8x_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 3 \\ 7x_2 - 26x_3 = -5 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 3 \\ 7x_2 - 26\cdot 1 = -5 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 3 \\ 7x_2 = 21 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2\cdot 3 + 7 = 3 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \end{cases}.$$

Як бачимо відповіді співпадають з отриманими раніше значеннями. (Висновок зробити самостійно).

4 Лінійні моделі «витрати-випуск» та їх використання для аналізу економічної діяльності закладів сфери обслуговування

Модель «витрати-випуск», яку також називають моделлю міжгалузевого балансу Леонтьєва, є основою багатьох лінійних моделей виробничого сектора економіки. Завдяки їй Василь Леонтьєв у 1973 році отримав Нобелевську премію з економіки.

Метою балансового аналізу – є відповідь на питання макроекономічного рівня, пов’язане з ефективністю ведення багатогалузевого господарства. А саме, яким має бути об’єм виробництва кожної з n галузей, щоб задовольнити потреби в продукції цієї галузі. Зв'язок між різними галузями, які можуть бути, як виробниками деякої продукції, так і – споживачами тієї чи іншої продукції або послуги, часто подається у вигляді таблиць міжгалузевого балансу. З метою їх аналізу у 1938 році американським економістом В. Леонтьєвим було розроблено його математичну модель.

Розглянемо процес виробництва (надання послуг) за певний період часу та введемо деякі позначення: x_i - загальний (валовий) об’єм продукції i-тої галузі ($i = 1,2,...,n$); x_{ij} - об’єм продукції i-тої галузі, що споживається в процесі виробництва j-тою галуззю ($i, j = 1,2,...,n$); y_i - об’єм кінцевого продукту i-тої галузі, що використовується не для виробництва. Оскільки валовий об’єм продукції будь-якої i-тої галузі дорівнює сумарному об’єму продукції, що споживають n галузей, та кінцевого продукту, то

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \text{ , } (i = 1,2,...,n),$$

яке називають *співвідношеннями балансу*.

Співвідношення балансу можуть бути записані:

а) у вигляді $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} + y_i \quad (i = 1,2,...,n)$ (3)

де $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j} \quad (i, j = 1,2,...,n)$ - *коефіцієнти прямих витрат*, які вказують на витрати продукції i - тої галузі на виробництво одиниці продукції j - тої галузі;

Зауваження 4. Якщо у деякий час коефіцієнт a_{ij} буде сталим і залежатиме від усталеної технології виробництва, то це вказуватиме на лінійну залежність матеріальних затрат від валового випуску, тобто

$$x_{ij} = a_{ij} x_j \text{ , } (i, j = 1,2,...,n).$$

У наслідок цього міжгалузевий баланс отримає назву *лінійного*.

б) у *матричному* вигляді

$$X = AX + Y$$

або $$(E - A)X = Y \tag{4}$$

де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix},$

X - вектор валового випуску, Y - вектор кінцевого продукту, A - матриця прямих витрат.

Головна задача міжгалузевого балансу складається у знаходженні такого вектору валового випуску X, який при відомій матриці прямих витрат A забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y.

Вектор X валового випуску знаходиться за формулою:

$$X = (E - A)^{-1} Y = S \cdot Y$$

де матриця $S = (E - A)^{-1}$ називається *матрицею повних витрат*, кожен елемент s_{ij} якої показує величину валового випуску продукції i-тої галузі, яка необхідна для забезпечення випуску одиниці кінцевого продукту j-тої галузі $y_i = 1$ ($j = 1,2,...,n$).

Зауваження 5. Матриця $A \geq 0$ називається *продуктивною* (технологічною), якщо для будь-якого вектора $Y \geq 0$ існує розв'язок $X \geq 0$ рівняння (4). У цьому випадку модель Леонтьєва називають продуктивною.

Існує декілька критеріїв за якими матриця A вважається продуктивною. Так, якщо матриця A продуктивна, то максимум сум елементів її стовпця не перебільшує одиниці, при цьому хоча б для одного із стовпців сума елементів менше за одиницю. Тобто, матриця A продуктивна, якщо $a_{ij} \geq 0$ для будь-яких $i, j = 1,2,...,n$ та $\max\limits_{j=1,2,...,n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ існує номер j такий, що $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$.

Чистою продукцією галузі називається різниця між валовою продукцією цієї галузі і витратами продукції всіх галузей на виробництво цієї галузі.

Скористаємося наведеними визначеннями для розв'язання задач.

Приклад 9. У таблиці 1 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 1

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">галузь</td><td colspan="2">Споживання</td><td rowspan="2">Кінцева продукція</td></tr>
<tr><td>Галузь 1</td><td>Галузь 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Виробництво</td><td>Галузь 1</td><td>0,35</td><td>0,25</td><td>350</td></tr>
<tr><td>Галузь 2</td><td>0,27</td><td>0,14</td><td>280</td></tr>
</table>

Знайти:

1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 15 %, а другої – на 20 %.

Розв'язання. 1) запишемо матрицю коефіцієнтів прямих витрат A і вектор кінцевої продукції Y :

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}25 \\ 0{,}27 & 0{,}14 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 350 \\ 280 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що матриця A продуктивна, тому що всі її елементи додатні та сума елементів в кожному рядку і в кожному менше одиниці.

Щоб знайти матрицю повних витрат, знайдемо матрицю $E - A$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}25 \\ 0{,}27 & 0{,}14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}65 & -0{,}25 \\ -0{,}27 & 0{,}86 \end{pmatrix}.$$

Звідси матриця повних витрат $S = (E - A)^{-1}$ знаходиться за розглянутим раніше алгоритмом знаходження оберненої матриці:

$$\det(E-A)=\begin{vmatrix} 0,65 & -0,25 \\ -0,27 & 0,86 \end{vmatrix}=0,559-0,0675=0,4915;$$

$$(E-A)^T=\begin{pmatrix} 0,65 & -0,27 \\ -0,25 & 0,86 \end{pmatrix};$$

$$A_{11}^T=0,86;\ A_{12}^T=0,25;\ A_{21}^T=0,27;\ A_{22}^T=0,65$$

$$S=(E-A)^{-1}=\frac{1}{0,4915}\begin{pmatrix} 0,86 & 0,25 \\ 0,27 & 0,65 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1,75 & 0,51 \\ 0,55 & 1,32 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо вектор валового продукту X за вищезазначеною формулою:

$$X=S\cdot Y=\begin{pmatrix} 1,75 & 0,51 \\ 0,55 & 1,32 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 350 \\ 280 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 612,5+142,8 \\ 192,5+369,6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 755,3 \\ 562,1 \end{pmatrix}.$$

Перший рядок матриці X відповідає галузі 1, а другий – галузі 2.

Міжгалузеві поставки x_{ij} знайдемо за формулою: $x_{ij}=a_{ij}x_j$

$$x_{11}=a_{11}\cdot x_1=0,35\cdot 755,3=264,35$$

$$x_{12}=a_{12}\cdot x_2=0,25\cdot 562,1=140,53$$

$$x_{21}=a_{21}\cdot x_1=0,27\cdot 755,3=203,93$$

$$x_{22}=a_{22}\cdot x_2=0,14\cdot 562,1=78,69$$

Чиста продукція галузі дорівнює різниці між валовою продукцією цієї галузі і витратами продукції всіх галузей на виробництво цієї галузі.

Отже, витрати продукції всіх галузей на виробництво:

- першої галузі:

$$x_{11} + x_{21} = 264{,}35 + 203{,}93 = 468{,}28\,;$$

- другої галузі:

$$x_{12} + x_{22} = 140{,}53 + 78{,}69 = 219{,}22$$

Остаточно маємо чисту продукцію

- першої галузі: $755{,}3 - 468{,}28 = 287{,}02$;
- другої галузі: $562{,}1 - 219{,}22 = 342{,}88$.

2) знайдемо вектор кінцевого споживання Y, з урахуванням того, що кінцеве споживання першої галузі збільшиться на 15%, а другої – на20 %:

$$Y = \begin{pmatrix} 350 \cdot 1{,}15 \\ 280 \cdot 1{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 402{,}5 \\ 336 \end{pmatrix}.$$

Останнє дає можливість знайти вектор валового випуску X, який при відомій матриці прямих витрат A забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y.

$$X = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1{,}75 & 0{,}51 \\ 0{,}55 & 1{,}32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 402{,}5 \\ 336 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 704{,}38 + 171{,}36 \\ 221{,}38 + 443{,}52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 875{,}74 \\ 664{,}9 \end{pmatrix}.$$

Приклад 10. У таблиці 2 наведено дані стосовно сукупного денного продажу по чотирьох готелях туристичної компанії:

Таблиця 2

Вид послуги	Магазини			
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Послуга1	35	51	36	70
Послуга 2	30	46	35	61
Послуга 3	50	49	52	48

Розв'язання. Зміст цієї таблиці можна подати у вигляді прямокутної матриці розміру 3×4:

$$A = \begin{pmatrix} 35 & 51 & 36 & 70 \\ 30 & 46 & 35 & 61 \\ 50 & 49 & 52 & 48 \end{pmatrix}.$$

Тоді легко інтерпретувати кожний її елемент. Наприклад, a_{32} означає, що продано третю послугу в другому готелі.

Приклад 11. Дані про сукупний продаж деякої туристичної фірми в I та II кварталах року записано матрицями:

$$A = \begin{pmatrix} 35 & 51 & 36 & 70 \\ 30 & 46 & 35 & 61 \\ 50 & 49 & 52 & 48 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 34 & 40 & 31 & 60 \\ 21 & 40 & 32 & 69 \\ 44 & 40 & 48 & 32 \end{pmatrix}.$$

Знайти дані про сукупний продаж послуг у туристичній компанії за перше півріччя визначеного року.

Розв'язання. Шукані дані запишемо в такому вигляді:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 35 & 51 & 36 & 70 \\ 30 & 46 & 35 & 61 \\ 50 & 49 & 52 & 48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 34 & 40 & 31 & 60 \\ 21 & 40 & 32 & 69 \\ 44 & 40 & 48 & 32 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 69 & 91 & 67 & 130 \\ 51 & 86 & 67 & 130 \\ 84 & 89 & 100 & 80 \end{pmatrix}.$$

Приклад 12. Ресторанний комплекс за день продає 45 шт. деякого товару, по 1 грн. за штуку, 30 шт. – по 2 грн. і 50 шт. – по 0,5 грн. Обчислити денний прибуток від продажу всіх товарів.

Розв'язання. Запишемо дані про проданий товар як матрицю-рядок x, а дані про ціни – матрицею-рядком p:

$$x = \begin{pmatrix} 45 & 30 & 50 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Тоді шуканий прибуток можна записати як добуток матриць x і p^T:

$$S = x \cdot p^T = \begin{pmatrix} 45 \cdot 30 \cdot 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = 45 + 30 \cdot 2 + 50 \cdot 0{,}5 = 130.$$

Приклад 13. Туристична компанія здійснює роздрібний та пакетний продаж туристичних послуг, а також продаж через Інтернет. Дані про денний продаж записано в таблиці 3:

Таблиця 3

Продаж	Товар (ціна)		
	Послуга 1 (1 тис. грн.)	Послуга 2 (2 тис. грн.)	Послуга 3 (0,5 тис. грн.)
Роздрібний	45	30	50
Пакетний	38	25	40
Через Інтернет	20	15	20

Обчислити денний прибуток від продажу кожного виду послуг окремо.

Розв'язання. Дані про продаж запишемо у вигляді матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 45 & 30 & 50 \\ 38 & 25 & 40 \\ 20 & 15 & 20 \end{pmatrix},$$

а дані про ціни (у тис. грн.) – матрицею-стовпцем

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Шуканий денний прибуток u_1, u_2, u_3 від продажу кожного з трьох видів послуг можна записати у вигляді матриці-стовпця u і визначити цю матрицю як добуток A і p :

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = A\,p = \begin{pmatrix} 45 & 30 & 50 \\ 38 & 25 & 40 \\ 20 & 15 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = .$$

$$= \begin{pmatrix} 45 \cdot 1 + 30 \cdot 2 + 50 \cdot 0{,}5 \\ 38 \cdot 1 + 25 \cdot 2 + 40 \cdot 0{,}5 \\ 20 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 20 \cdot 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 108 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Приклад 14. Ресторанний комплекс виготовляє три види продукції: торти, кекси та тістечка; при цьому використовує три види сировини S_1, S_2, S_3. Норми витрат сировини на один вид та об'єм витрат її на кожен день подано у таблиці 4:

Таблиця 4

Вид сировини	Норми витрат сировини на один вид продукції, умов. один			Об'єм витрат сировини на 1 день, умов. один
	торти	кекси	тістечка	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	800
S_3	3	2	2	1600

Знайти щоденний об’єм випуску продукції кожного виду.

Розв’язання. Нехай щоденно ресторан виготовлює x_1 тортів, x_2 кексів, x_3 тістечок. Тоді відповідно до витрат сировини кожного виду маємо систему:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 800 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600 \end{cases}.$$

(Систему розв’язати самостійно)

Розв’язавши систему, отримаємо $x_1 = 200$, $x_2 = 300$, $x_3 = 200$; тобто ресторан виготовляє 200 тортів, 300 кексів та 200 тістечок.

Приклад 15. Туристична компанія пропонує три типи послуг, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i- тої послуги на забезпечення одиниці послуги j-го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу компанія запропонує кількість кожного типу послуг, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 8 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 275 \\ 230 \\ 495 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 160 & 10 & 25 & 45 \end{pmatrix}$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на підготовку всіх послуг за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

Розв'язання: а) матриця повних затрат ресурсів кожного виду на підготовку всіх послуг за певний період знаходиться за формулою $S = A \cdot X$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 8 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 275 \\ 230 \\ 495 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 275 + 7 \cdot 230 + 9 \cdot 495 \\ 8 \cdot 275 + 4 \cdot 230 + 3 \cdot 495 \\ 6 \cdot 275 + 2 \cdot 230 + 8 \cdot 495 \\ 5 \cdot 275 + 4 \cdot 230 + 9 \cdot 495 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1100 + 1610 + 4455 \\ 2200 + 920 + 1485 \\ 1650 + 460 + 3960 \\ 1375 + 920 + 4455 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7165 \\ 4605 \\ 6070 \\ 6750 \end{pmatrix}.$$

б) повну вартість усіх витрачених ресурсів зможемо знайти за формулою $C = P \cdot A \cdot X$ або $C = P \cdot S$

$$C = \begin{pmatrix} 160 & 10 & 25 & 45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7165 \\ 4605 \\ 6070 \\ 6750 \end{pmatrix} = 1647950.$$

Отже, повна вартість витрачених ресурсів складає 1647950 грошових одиниць.

ЛЕКЦІЯ 2

План лекції

1. Сталі та змінні величини. Поняття функції. Складена функція. Основні властивості функцій. Поняття області визначення функції.
2. Поняття границі змінної величини. Границя функції. Властивості границі функції.
3. Обчислення границі функції. Перша й друга визначні границі. Розкриття деяких видів невизначеностей.
4. Поняття неперервності функції. Точки розриву функції. Класифікація точок розриву.

1 Сталі та змінні величини. Поняття функції. Складена функція. Основні властивості функцій. Поняття області визначення функції

Сталою величиною вважають величину, яка не змінює своє значення. Зазвичай такі величини позначають латинськими буквами $a, b, c, \ldots$. *Змінною* величиною називають величину, яка приймає різні числові значення (позначають їх: $x, y, z, u, v, w, \ldots$).

Змінну величину y називають *функцією* змінної величини x, якщо кожному значенню x, яке вона приймає, відповідає єдине значення y. При цьому величну x називають незалежною змінною або аргументом; y - залежною. Позначають $y = f(x)$. Значення, яке приймає функція якщо $x = a$, позначають $f(a)$. *Коренем функції* (або нулем) називають значення аргументу $x = a$ при якому значення функції дорівнює нулю, тобто: $f(a) = 0$.

Сукупність усіх значень аргументу, при яких функція має визначені дійсні значення, називають областю існування функції або *областю визначення функції*.

Приклад 1. Знайти область визначення заданих функцій: а) $y = \dfrac{x+3}{x^2+3x-4}$; б) $y = \sqrt{x^2-16}$.

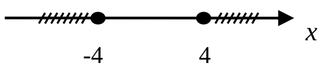
Розв'язання.

а) $y = \dfrac{x+3}{x^2+3x-4}$, ОДЗ: $x^2+3x-4 \neq 0, (x-1)(x+4) \neq 0$,

$$x-1 \neq 0, x_1 \neq 1, x+4 \neq 0, x_2 \neq 4,$$

$$\textit{Відповідь}: x \in (-\infty;1) \cup (1;4) \cup (4;\infty);$$

б) $y = \sqrt{x^2-16}$, ОДЗ: $x^2-16 \geq 0, (x-4)(x+4) \geq 0$



$$\textit{Відповідь}: x \in (-\infty;-4] \cup [4;\infty).$$

Графіком функції $y = f(x)$ називають геометричне місце точок $M(x, y)$, координати яких задовольняють даній функціональній залежності.

Функція може бути подана табличним, графічним, аналітичним або іншим способом.

Явною функцією називають функцію, яка задана формулою $y = f(x)$. Неявною функцією називають функцію задану рівнянням: $F(x, y) = 0$.

Функція, що визначена в області $-a < x < a$, називається *парною*, якщо для всіх x з області визначення виконується рівність, що $f(x)=f(-x)$. Графік такої функції буде симетричним відносно осі y.

Функція називається *непарною*, якщо для всіх x з області визначення виконується рівність, що $f(x)=-f(-x)$. Графік такої функції буде симетричним відносно початку координат.

Приклад 2. Встановити, чи є непарною (парною) функція $y=x+\frac{x^5}{5}+3x^3$.

Розв'язання. Переконаємось, що виконується одна з рівностей: $f(x)=f(-x)$ або $f(x)=-f(-x)$. Замінимо x на $-x$ у виразі для функції y:

$$y(-x)=-x+\frac{(-x)^5}{5}+3(-x)^3=-x-\frac{x^5}{5}-3x^3=-(x+\frac{x^5}{5}+3x^3)=-y(-x).$$

Як бачимо, виконується рівність $f(x)=-f(-x)$, що свідчить про те, що задана функція є непарною.

Функція називається *періодичною* з періодом T, якщо для будь-якого x з області визначення виконується рівність, що $f(x)=f(x+T)$. Зі шкільного курсу нам відомі такі функції, як $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$. (Для повторення можна скористатися [8;9] зі списку літератури).

2 Поняття границі змінної величини. Границя функції. Властивості границі функції

Нехай змінна величина x поступово приймає значення

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n.$$

Таку пронумеровану множину чисел називають *послідовністю* й позначають $\{x_n\}$. Послідовність вважають заданою, якщо відома формула для n-го члена цієї послідовності.

Розташуємо елементи послідовності $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, де n - натуральне число, на числовій осі, позначивши кожен елемент точкою (рисунок 1).

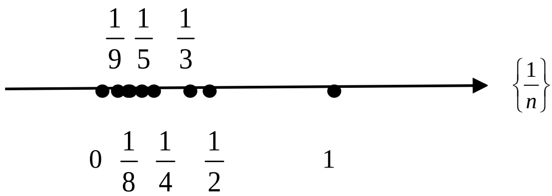


Рисунок 1

Як бачимо на рисунку 1 зі зростанням порядкового номеру елементу (тобто $n \to \infty$) елементи (члени) цієї послідовності концентруються біля точки 0, тобто їх абсолютне значення наближається до нуля. Представимо визначення границі послідовності.

Число A називають *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для будь-якого наскільки завгодно малого додатного числа ε, знайдеться такий номер N (який залежить від ε), що для всіх членів послідовності починаючи з номеру $n > N$ є вірною рівність

$$|x_n - A| < \varepsilon .$$

Границя числової послідовності позначається

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ або $x_n \to A$ якщо $n \to \infty$. З геометричної точки зору: нерівність $|x_n - A| < \varepsilon$ рівносильна подвійній нерівності $A-\varepsilon < x_n < A+\varepsilon$ й означає, що члени послідовності $\{x_n\}$ розташовані поблизу точки A, точніше в ε - околі цієї точки. Зовні цього ε - околу може знаходитися лише кінцеве число членів даної послідовності. Якщо послідовність має границю, то кажуть, що вона збігається, у протилежному випадку – розбігається.

Отже, згідно означення, для розглянутої нами послідовності $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ можна записати, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ і вона збігається.

Число A називають *границею функції* $y = f(x)$ при $x \to a$, якщо для будь-якого значення аргументу x такого, що воно скільки завгодно мало відрізняється від a, значення функції настільки ж мало відрізняється від A.

Розглянемо геометричний зміст границі функції у точці (рисунок 2).

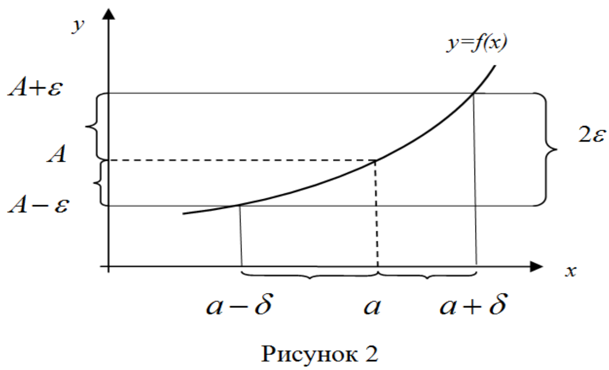


Рисунок 2

Як відомо нерівність $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$ рівносильна подвійній нерівності $A-\varepsilon< f(x)<A+\varepsilon$, яка відповідає розташуванню частини графіку у полосі шириною 2ε. Аналогічно $|x-a|<\delta$ рівносильна подвійній нерівності $a-\delta<x<a+\delta$ відповідає розташуванню точок x в околі точки a. Тож, для всіх значень аргументу x, при цьому $x\neq a$, що розташовані в δ- околі точки a, відповідні ординати функції $y=f(x)$ будуть знаходитися в ε-околі значення функції A, тобто у полосі що обмежена лініями $y=A-\varepsilon$, $y=A+\varepsilon$, якою б вузькою ця полоса не була.

Зауваження 1. Означення границі не вимагає існування функції в самій точці a, оскільки розглядається значення $x\neq a$ у деякому околі точки a. Отже, розглядаючи $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, ми припускаємо, що x прямує до a, але може й не досягти значення a. Саме тому наявність або відсутність границі коли $x\to a$ визначається поведінкою функції в околі точки a, але не пов'язана із значенням функції (або його відсутністю) в цій точці.

Зауваження 2. Якщо при $x\to a$ змінна x приймає лише значення менші за a, або навпаки, лише значення більше за a, й при цьому функція $y=f(x)$ прямує до деякого числа A, то кажуть про односторонні границі функції $y=f(x)$, відповідно границя ліворуч $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A$ та границя праворуч $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$. Визначення цих границь дивись у додатку Б.

Зрозумілим стає факт, що, якщо $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$ та $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

У випадку, коли змінна x прямує до нескінченності означення границі функції подається аналогічно. Завдяки цьому можемо надати розгорнуте визначення нескінченно малої величини.

Функція $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою величиною*, коли $x \to a$, якщо для будь-якого скільки завгодно малого додатного числа $\varepsilon > 0$ можна вказати такий момент зміни цієї величини, починаючи з якого $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Не слід плутати нескінченно малу змінну величину $\alpha(x)$ з достатньо малим, але постійним числом $\varepsilon > 0$, оскільки з наближенням значення x до a (коли $x \to a$) або з зростанням значення x (коли $x \to \infty$) функція $\alpha(x)$ відповідно до означення буде менше по абсолютній величині за число ε. Тільки одна постійна величина 0 є нескінченно малою величиною.

Властивості нескінченно малих (без доведення):

1) алгебраїчна сума кінцевого числа нескінченно малих є величина нескінченно мала;
2) добуток нескінченно малої величини на обмежену функцію (в тому числі й постійну та другу нескінченно малу) є величина нескінченно мала;
3) частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, границя якої відрізняється від нуля, є величиною нескінченно малою (ця властивість не розглядає випадок границі частки двох нескінченно малих величин у зв'язку її невизначеності).

Функція $\beta(x)$ називається *нескінченно великою величиною*, якщо для будь-якого завгодно великого додатного числа N можна вказати такий момент зміни цієї величини, починаючи з якого $|\beta(x)| < N$.

Властивості нескінченно великих (без доведення):

1) добуток нескінченно великої величини на функцію, границя якої відрізняється від нуля, є величина нескінченно велика;
2) сума нескінченно великої величини на обмежену функцію є величина нескінченно велика;
3) частка від ділення нескінченно великої величини на функцію, що має границю, є величина нескінченно велика.

Теорема 1. Величина обернена нескінченно малій величині є величина нескінченно велика й навпаки. (Без доведення).

Порівняння нескінченно малих величин дивись у додатку В.

Доведення основних властивостей границь ґрунтується на означенні границі та властивостях нескінченно малих. Ми розглядатимемо їх без доведення.

Теорема 2. Змінна величина в фіксованому процесі змінювання має не більше однієї границі.

Зауваження 3. Змінна величина може не мати границі в даному процесі змінювання. Змінна величина може вести себе по-різному в різних процесах змінювання.

Теорема 3. Змінна величина, що має скінченну границю, є обмеженою у відповідному процесі змінювання.

Теорема 4. Границя сталої величини дорівнює самій цій величині: $\lim\limits_{x\to a} C = C$, $C = const$.

Теорема 5. Границя скінченної алгебраїчної суми змінних величин дорівнює такій же сумі їх границь, якщо останні існують:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+\varphi(x)-\psi(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a}\varphi(x)-\lim_{x\to a}\psi(x).$$

Теорема 6. Границя добутку двох змінних величин дорівнює добутку їх границь, якщо останні існують:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x).$$

Наслідок 1. Сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити за знак границі:

$$\lim(Cx) = C\cdot\lim\, x\ ,\ \ C = const\ .$$

Наслідок 2. Границя степеня з натуральним показником змінної величини дорівнює відповідному степеню її границі, якщо остання існує:

$$\lim\, x^n = (\lim\, x)^n\ ,\ \ n\in N\ .$$

Теорема 7. Границя відношення двох змінних величин дорівнює такому ж відношенню їх границь, якщо останні існують, причому границя знаменника відмінна від нуля:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)},\ \ \lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0\,.$$

3 Обчислення границі функції. Перша й друга визначені границі. Розкриття деяких видів невизначеностей.

Розглянемо приклад знаходження границі функції, користуючись зазначеними властивостями.

Приклад 3. Знайти границю $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x+4}{x^2+1}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x+4}{x^2+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2-x+4\right)}{\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2+1\right)}=$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to -2}x^2+\lim\limits_{x\to -2}x+\lim\limits_{x\to -2}4}{\lim\limits_{x\to -2}x^2+\lim\limits_{x\to -2}1}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to -2}x\right)^2+\lim\limits_{x\to -2}x+\lim\limits_{x\to -2}4}{\left(\lim\limits_{x\to -2}x\right)^2+\lim\limits_{x\to -2}1}=$$

$$=\frac{\left(\lim\limits_{x\to -2}x\right)^2+\lim\limits_{x\to -2}x+\lim\limits_{x\to -2}4}{\left(\lim\limits_{x\to -2}x\right)^2+\lim\limits_{x\to -2}1}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to -2}(-2)\right)^2+\lim\limits_{x\to -2}(-2)+\lim\limits_{x\to -2}4}{\left(\lim\limits_{x\to -2}(-2)\right)^2+\lim\limits_{x\to -2}1}=$$

$$=\frac{(-2)^2+(-2)+4}{(-2)^2+1}=\frac{6}{5}.$$

Зауваження 4. Як бачимо з наведеного прикладу, для знаходження границі функції раціонального дробу $P(x)/Q(x)$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени, можна обчислити шляхом прямої підстановки замість x його граничного значення, якщо при цьому не порушуються умови, вказані у властивостях границь.

Зауваження 5. Якщо вказані умови порушуються, то треба скористатися, зокрема, властивостями нескінченно малих і нескінченно великих величин.

$$C\cdot 0=0,\ \frac{0}{C}=0,\ \frac{C}{0}=\infty,\ C\cdot\infty=\infty,\ \frac{\infty}{C}=\infty,\ \frac{C}{\infty}=0,\ C=const.$$

Приклад 4. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x+4}{x^2-1}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x+4}{x^2-1}=\left|\dfrac{1^2+3\cdot 1+4}{1^2-1}=\dfrac{8}{0}\right|=\infty$.

Розглянемо способи обчислення границі функції.

1. Розкриття невизначеності виду $\left|\frac{0}{0}\right|$.

Для розкриття невизначеності виду $0/0$ для многочленів $P(x)/Q(x)$ треба чисельник $P(x)$ і знаменник $Q(x)$ розкласти на множники та скоротити дріб, а потім перейти до границі.

Приклад 5. Знайти границі а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^3-27}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2-3x+5}{x^2+x-2}$.

Розв'язання. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^3-27}=\left|\frac{0}{0}\right|=$

$$=\left|\begin{array}{c} 2x^2-5x-3=2(x-3)(x+1/2) \\ D=1;x_1=3;x_2=-\dfrac{1}{2} \\ x^3-27=(x-3)\left(x^2+3x+9\right) \end{array}\right|=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)(x+1/2)}{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2(x+1/2)}{x^2+3x+9}=\frac{2\cdot 3+1}{9+9+9}=\frac{7}{27};$$

б) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2-3x+5}{x^2+x-2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{array}{c} x^2+x-2=(x-1)(x+2) \\ x_1=1;x_2=-2 \end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2-2x-5\right)}{(x-1)(x+2)}=$$

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{\ \ } x^3-3x^2-3x+5 & x-1 \\ \cline{2-2}
\quad \underline{x^3-x^2} & x^2-2x-5 \\
\qquad \underline{\ \ } -2x^2-3x+5 & \\
\qquad\quad \underline{-2x^2+2x} & \\
\qquad\qquad \underline{\ \ } -5x+5 & \\
\qquad\qquad\ \ \underline{-5x+5} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x-5}{x+2}=\frac{1^2-2-5}{1+2}=\frac{-6}{3}=-2\,.$$

2. Розкриття невизначеності виду $\left|\frac{0}{0}\right|$ для ірраціональних виразів

Для розкриття невизначеності виду $0/0$ для ірраціональних виразів треба спочатку відповідним чином позбавитись ірраціональності, що дає нуль, потім скоротити дріб, і нарешті перейти до границі.

Тобто, слід помножити і чисельник, і знаменник на відповідно протилежне та застосувати формули скороченого множення:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b) \text{ або } a^3\pm b^3=(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right).$$

Приклад 6. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{12-x}-3}{x^2-x-6}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{12-x}-3}{x^2-x-6}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{12-x}-3\right)\left(\sqrt{12-x}+3\right)}{\left(x^2-x-6\right)\left(\sqrt{12-x}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{12-x}\right)^2-3^2}{(x-3)(x+2)\left(\sqrt{12-x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)}{(x-3)(x+2)\left(\sqrt{12-x}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{(x+2)\left(\sqrt{12-x}+3\right)}=\frac{-1}{30}.$$

3. Розкриття невизначеності виду $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$

Для розкриття невизначеності виду ∞/∞ для многочленів $P(x)/Q(x)$ треба чисельник $P(x)$ і знаменник $Q(x)$ поділити на найвищий степінь x, а потім перейти до границі.

Зауваження 6. Це правило є справедливим для всіх випадків нескінченно великих величин ∞, $+\infty$ чи $-\infty$, тобто знак символу ∞ можна не уточнювати

Приклад 7. Знайти границі а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^3+4x-1}{5x^2-2x+6}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^2-4x-7}{8x^2-3x+6}$.

Розв'язання.

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-2x^3+3x-1}{2x^2-7x+5}\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(\frac{5x^4}{x^4}-\frac{2x^3}{x^4}+\frac{3x}{x^4}-\frac{1}{x^4}\right)}{x^2\left(\frac{2x^2}{x^2}-\frac{7x}{x^2}+\frac{5}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(5-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)}{2-\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}}\left|\begin{matrix}\textit{враховуючи}\\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{C}{x^n}\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{2}=\infty;$$

б) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2-4x-7}{8x^2-3x+6}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(5-\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(8-\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}=\frac{5}{8}.$$

Зауваження 7. Аналізуючи наведені приклади, можна зробити висновок, що під час знаходження границі функції, представленої у вигляді частки двох многочленів, коли $x \to \infty$, слід звернути увагу на найвищі (старші) степені многочленів, що містяться у чисельнику та знаменнику. Якщо ці степені однакові (приклад 7, б), то границя функції дорівнюватиме відношенню коефіцієнтів при цих найвищих степенях, якщо ж неоднакові, та найвищу степінь має многочлен, що розташований у чисельнику, то границя дорівнюватиме нескінченності (приклад 7, а). У випадку розташування многочлена з найвищим степенем у знаменнику границя дорівнює 0.

4. Обчислення границі тригонометричних функцій. Перша визначна границя.

Теорема 8. Якщо функція $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ коли $\alpha \to 0$ має границю, то вона дорівнює 1:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

Доведення можна знайти у [1; 4;7;8] зі списку літератури.

Наслідки: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\arcsin\alpha}{\alpha}=1$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{tg\alpha}{\alpha}=1$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{arctg\alpha}{\alpha}=1$.

За допомогою першої визначеної границі знаходять такі границі, як, наприклад:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin 4x}{4x}=4\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}=4;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin x}{x^2}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\dfrac{4x-x}{2}\cdot\cos\dfrac{x+4x}{2}}{x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{3}{2}x\cdot\cos\frac{5}{2}x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}\sin\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x}\cdot\frac{\cos\frac{5}{2}x}{x}=3\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty;$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{tg5x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot\arcsin 2x}{2x}\cdot\dfrac{5x}{5x\cdot tg5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$.

5. Друга визначна границя

Розглядаючи послідовність $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, шляхом обчислення значень елементів цієї послідовності, можна з'ясувати, що вона зростаюча (оскільки з ростом n зростає величина кожного елементу та їх кількість) та обмежена (оцінюючи її елементи та вважаючи її геометричною прогресією, суму якої легко знайти). Тоді, згідно ознаки існування границі, монотонна та обмежена послідовність $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ має границю. Ця границя позначається літерою e.

Теорема 9. Функція $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ прямує, коли $x\to\infty$, до границі e:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Доведення можна знайти у [1; 4;7;8] зі списку літератури.

Якщо для функції $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ввести нову змінну $z=\frac{1}{x}$, та виразити $x=\frac{1}{y}$, тоді, якщо $x\to\infty$, то $z\to 0$, отримаємо

$(1+z)^{\frac{1}{z}}$ й матимемо ще один запис для числа e: $\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e$. Число e (*число Ейлера*, неперове число), яке дорівнює $e=2{,}718281828459045...\approx 2{,}72$ відіграє важливу роль у математичному аналізі. Графік функції $y=e^x$ має назву *експоненти*, він монотонно зростає й немає точок перетину з віссю $0x$ (тобто, $y\neq 0$). Оберненою функцією є логарифмічна функція за основою e, логарифм за основою e називають *натуральним*, позначають: $\ln x=\log_e x$.

Приклад 8. Знайти границі а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x+4}\right)^{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right)^{4x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg\,2x)^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x+4}\right)^{x}=\left|1^{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x+4}\right)^{\frac{x\cdot(3x+4)}{3x+4}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x+4}\right)^{3x+4}\right)^{\frac{x}{3x+4}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{3x+4}}=e^{\frac{1}{3}};$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right)^{4x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x-3}{x+4}-1\right)^{4x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x-3-x-4}{x+4}\right)^{4x+1}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{x+4}\right)^{4x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-7}{x+4}\right)^{\frac{x+4}{-7}}\right)^{\frac{-7(4x+1)}{x+4}}=e^{-28};$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg\,2x)^{\frac{1}{x}}=\left|1^{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\left((1+tg\,2x)^{\frac{1}{tg\,2x}}\right)^{\frac{tg\,2x}{x}}=e^{2}$.

Зауваження 8. Функція вигляду $y=\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$ називають степенево-показниковою функцією. Під час находження границі цієї функціє $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$ слід брати до уваги, наступне:

1) якщо існують кінцеві границі функцій $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B$, то границя $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=A^B$;

2) якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, то маємо невизначеність вигляду 1^∞ та застосовуємо другу визначену границю, як вище наведено;

3) якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A\neq 1$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, то використовуємо формули

$$\lim_{x\to+\infty} A^x=\begin{cases}0, & якщо\ 0<A<1\\ +\infty, & якщо\ A>1\end{cases};\quad \lim_{x\to-\infty} A^x=\begin{cases}+\infty, & якщо\ 0<A<1\\ 0, & якщо\ A>1\end{cases}.$$

Наприклад, знайдемо таку границю $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-3}{x+4}\right)^{4x+1}$. По-перше, відшукаємо окремо границі основи та показника степеня: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-3}{x+4}\right)=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\dfrac{2}{1}=2$ (дивись зауваження 7) та $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x+1)=-\infty$. Згідно зауваженню 8 п. 3, матимемо границю заданої функцію: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-3}{x+4}\right)^{4x+1}=2^{-\infty}=\dfrac{1}{2^\infty}=0$.

4 Поняття неперервності функції. Точки розриву функції. Класифікація точок розриву

Нехай ми маємо функцію $y = f(x)$, яка визначена у деякому околі точки x_0 з центром у цій точці, при цьому $y_0 = f(x_0)$. Якщо x_0 отримає деякий приріст Δx будь-якого знаку, тобто матиме значення $x_0 + \Delta x$, то відповідно й функція отримає деякий приріст Δy та її значення буде $y_0 + \Delta y$. Виходячи з цього приріст функції матиме такий вираз: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Функція $y = f(x)$ називається *неперервною у точці* x_0, якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргументу Δx відповідає нескінченно малий приріст функції Δy, тобто: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)\right] = 0$.

Геометрично неперервність функції означає, що різниця між ординатою у точці x_0 та точкою $x_0 + \Delta x$ буде достатньо малою абсолютною величиною, тільки якщо Δx достатньо мале. Користуючись поняттям границі, це можна записати так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функцію вважають неперервною на інтервалі, якщо вона неперервна в усіх точках цього інтервалу. Якщо функція визначена у деякій точці x_0 й при цьому $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, то кажуть, що функція $y = f(x)$ у x_0 неперервна праворуч. Якщо функція визначена у деякій точці x_1 й при цьому $\lim\limits_{x \to x_1 - 0} f(x) = f(x_1)$, то кажуть, що функція $y = f(x)$ у x_1 неперервна ліворуч.

Неперервна функція має такі *властивості*:

1) сума неперервних функцій є функція неперервна;

2) добуток декількох неперервних функцій є функція неперервна;

3) частка двох неперервних функцій є функція неперервна в усіх точках, у яких дільник відрізняється від нуля;

4) якщо $y = f(z)$ та $z = \varphi(x)$ неперервні функції своїх аргументів, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ також неперервна;

5) якщо функція $y = f(x)$ неперервна та існує обернена $x = \varphi(y)$ то вона також неперервна.

Якщо не виконується хоча б одна з умов неперервності, тобто, якщо функція $y = f(x)$ невизначена у точці x_0 або не існує границя функції $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ або ж $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, хоча вирази праворуч та ліворуч існують, то при $x = x_0$ функція $y = f(x)$ є *розривною*.

Точкою розриву першого роду функції $y = f(x)$ називають таку точку x_0, в якій функція має обидві кінцеві односторонні границі (границю ліворуч та праворуч), але вони не дорівнюють одна одній, тобто $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x_0)$. У випадку коли односторонні границі у точці x_0 однакові, але сама функція $y = f(x)$ невизначена, точку $x = x_0$ називають точкою *усувного розриву* функція. До *точок розриву другого роду* належать точки, в яких хоча б одна з односторонніх границь прямує до нескінченості.

Приклад 9. З'ясувати наявність точок розриву функцій: а) $y=\dfrac{3}{(x-3)^2}$, б) $f(x)=\begin{cases} x^2, x\ge 0 \\ \dfrac{\sin x}{x}, x<0 \end{cases}$.

Розв'язання. а) Функція $y=\dfrac{3}{(x-3)^2}$ невизначена у точці $x=3$, границя функції у точці $x=3$: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3}{(x-3)^2}=\infty$, тож в цій точці функція має розрив. Обчислимо односторонні границі поблизу точки $x=3$:

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{3}{(x-3)^2}=+\infty,\ \lim_{x\to 3-0}\frac{3}{(x-3)^2}=-\infty.$$

Оскільки односторонні границі нескінчені, то точка $x=3$ є точкою розриву другого роду.

б) Функція $f(x)=\begin{cases} x^2, x\ge 0 \\ \dfrac{\sin x}{x}, x<0 \end{cases}$ невизначена у точці $x=0$, то вона має розрив у цій точці, розглянемо односторонні границі:

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} x^2=0,\ \lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Односторонні границі існують, але неоднакові, то в точці $x=0$ функція має розрив першого роду.

ЛЕКЦІЯ 3

План лекції

1. Приріст аргументу та функція. Поняття похідної функції. Економічний зміст похідної.
2. Основні правила диференціювання. Таблиця похідних. Теорема про похідну складеної функції.
3. Похідна неявно заданої та параметричної функції. Логарифмічне диференціювання.
4. Диференціал функції, його геометричний зміст. Застосування диференціалу при наближених обчисленнях.

1 Приріст аргументу та функція. Поняття похідної функції. Економічний зміст похідної

Поняття приросту аргументу та функції ми ввели на попередній лекції, але щоб пригадати, сформулюємо означення наступним чином: *приростом аргументу* Δx називають різницю між попереднім та наступним значенням аргументу x. Тобто, якщо матеріальна точка на координатній осі змінює своє місце знаходження від координати x_0 до деякої координати x, то: $x - x_0 = \Delta x$.

У декартовій системі координат точка M має дві координат x та y, тож, під час руху матеріальної точки на площині, якщо зміниться координата x то й відповідно зміниться координата y. Тобто, якщо значення функції $y_0 = f(x_0)$ було початковим, а наступним значенням $y = f(x)$, то приріст функції буде розглядатися так:

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$. При цьому значення функції у довільній точці x можна також записати, як $y = f(x_0 + \Delta x)$.

Ведемо поняття похідної функції.

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до 0:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ або}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Позначають похідну: $f'(x)$, y', y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = \sin x$. Обчислити значення похідної цієї функції у точці $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язання. Згідно означення ми маємо знайти границю відношення проросту функції до приросту аргументу, коли $x \to 0$. Запишемо приріст функції:

$f(x) = \sin x$, $f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$; $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) =$

$$= \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{x + \Delta x - x}{2}\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x + \Delta x}{2}.$$

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x + \Delta x}{2}}{\Delta x}$$

та обчислимо границю

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$=\cos x_0$. Отже, $(\sin x)'=\cos x$. Тепер обчислимо значення похідної у точці $x=\frac{\pi}{3}$. Для цього в знайдений вираз для похідної заданої функції замість змінної x підставимо значення $\frac{\pi}{3}$, та отримаємо, що $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

Зауважимо, що у загальному випадку для кожного значення аргументу x похідна $f'(x)$ має визначене значення, тобто похідна також є функцією від аргументу x. Функція, що має кінцеву похідну, називається *диференційованою*. Операцію знаходження похідної від функції $y=f(x)$ називають *диференціюванням цієї функції*.

Геометричний зміст похідної полягає в тому, що похідна функції $y=f(x)$ для кожного значення x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної (рисунок 1) до графіка даної функції в відповідній точці M, тобто $f'(x)=tg\alpha$; де α – це кут, який утворює дотична до графіку з додатним напрямом осі абсцис; цей кут є функцією аргументу x.

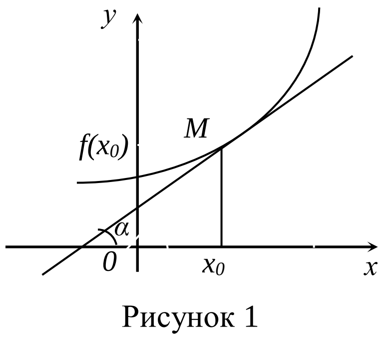


Рисунок 1

Рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ має такий вигляд:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0),$$

де x_0 – абсциса точки дотику M, y_0 відповідно її ордината; $y'(x_0)$ – це похідна функції визначена у точці дотику M, (а також $y'(x_0) = k$, де k – кутовий коефіцієнт дотичної); y, x довільні змінні.

Фізичний або механічний зміст полягає в тому, що закон нерівномірного руху матеріальної точки виражається функцією $s = f(t)$. Ця функція змінюється за часом t, похідна $s'(t)$ є швидкістю зміни функції в даний момент часу t_0 (кажуть: миттєва швидкість), тобто: $f'(t_0) = v(t_0)$; де $v(t_0)$ – це швидкість зміни $s = f(t)$ в момент часу $t = t_0$.

Швидкість протікання фізичних, хімічних та інших процесів виражається за допомогою похідної. Також завдяки широкому розумінню слова «швидкість», як швидкості зміни функції в залежності від зміни аргументу, можна вказати й економічний зміст похідних від функцій, які описують певні економічні процеси.

Нехай витрати виробництва V однорідної продукції є функцією кількості продукції x, тобто $V = V(x)$. Припустимо, що кількість продукції збільшується на Δx. Продукції $x + \Delta x$ відповідають витрати виробництва $V(x + \Delta x)$. Приріст витрат виробництва $\Delta V(x) = V(x + \Delta x) - V(x)$. Середній приріст витрат на одиницю приросту продукції $\dfrac{\Delta V}{\Delta x}$.

Похідна $V'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta V}{\Delta x}$ називається *маржинальними* (або граничними) витратами виробництва при умовах хоча би простого відтворення виробництва продукції. Вкажемо на економічний зміст похідних для інших залежностей, які найбільш часто вживаються. Позначимо через $D(x)$ та $P(x)$ відповідно дохід і прибуток при виробництві і реалізації x одиниць продукції. Тоді, якщо підприємство збільшує випуск продукції на Δx одиниць, ці функції одержать приріст

$$\Delta D(x)=D(x+\Delta x)-D(x),$$

$$\Delta P(x)=P(x+\Delta x)-P(x),$$

а тому *маржинальний дохід*

$$D'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta D(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{D(x+\Delta x)-D(x)}{\Delta x}$$

а *маржинальний прибуток*

$$P'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta P(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x+\Delta x)-P(x)}{\Delta x}.$$

Дивись у [3; 4; 7; 8].

Теорема 1. Якщо функція $y=f(x)$ диференційована у деякій точці $x=x_0$, то вона неперервна у цій точці.

А отже, у точках розриву функція не може бути диференційована. Але зворотне твердження не має сенсу, тобто функція $y=f(x)$ може й не мати похідну у точці $x=x_0$, незважаючи на те, що вона у цій точці неперервна.

2 Основні правила диференціювання. Таблиця похідних функції. Теорема про складену функцію

Розглянемо правила диференціювання. Якщо функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ диференційовані від x на проміжку $(a;b)$, то справедливі такі правила:

1) під час знаходження похідної сталий множник можна винести за знак похідної: $(C \cdot u)' = C(u)'$, $C = const$;

2) похідна від суми (різниці) декількох функцій, дорівнює сумі похідних від кожного функції-доданку:

$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$

3) похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу функцію і похідної другої функції на першу функцію:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u;$$

4) похідна частки двох функцій дорівнює дробу, у якому знаменник є квадрат знаменника, а чисельник є різниця між добутком похідної чисельника на знаменник і добутком похідної знаменника на чисельник:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}, \ v \neq 0.$$

Теорема 2 *(похідна складеної функції)*. Якщо функція $u = u(x)$ має похідну у деякій точці $x \in (a;b)$, а функція $y = f(u)$ має похідну у відповідній точці $u = u(x)$, то й складена функція $y = f(u(x))$ має похідну у точці x, причому

$$y'_x = (f(u(x))' = y'_u(u) \cdot u'_x(x),$$

де нижні індекси u і x вказують, за яким аргументом обчислюють похідні. Тобто похідна складеної функції дорівнює похідній зовнішньої функції за проміжним аргументом, помноженій на похідну внутрішньої функції.

Зауважимо, що складеними функціями вважають такі функції, як:

$$y = \cos 2x\,,\ y = e^{\cos 2x}\,,\ y = arctg(\ln\sqrt{\sin 3x})\,.$$

Перед тим як ми перейдемо до безпосереднього знаходження похідної складеної та інших функції, ми нагадаємо про похідні елементарних функцій, які подамо у таблиці 1, де $u = u(x)$ вважатимемо складеною функцією аргументу x.

Таблиця 1

Формули похідних		
ч.ч.	Функція	Похідна
1	2	3
1	Стала функція	$C' = 0$
2	Степенева функція	$\left(u^a\right)' = a\,u^{a-1}\cdot u'$
2а	x	$x' = 1$
2б	$\sqrt{u}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$
2в	$\frac{1}{u}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}\cdot u'$
3	Показникова функція	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a\cdot u'$

Продовження таблиці 1

1	2	3
3а	Експонента	$\left(e^{u}\right)' = e^{u}\cdot u'$
4	Логарифмічна функція	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u\ln a}\cdot u'$
4а	Натуральний логарифм	$\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u}\cdot u'$
5	Синус	$\left(\sin u\right)' = \cos u\cdot u'$
6	Косинус	$\left(\cos u\right)' = -\sin u\cdot u'$
7	Тангенс	$\left(tg\ u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
8	Котангенс	$\left(ctg\ u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
9	Арксинус	$\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
10	Арккосинус	$\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
11	Арктангенс	$\left(arctg\, u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
12	Арккотангенс	$\left(arcctg\, u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Приклад 2.Знайти похідну функцій

а) $y = 5^{ctg\,2x} - \sqrt{\ln(3-x^2)}$; б) $y = \sqrt[5]{x}\arccos 4x$.

Розв'язання. а) $y = 5^{ctg\,2x} - \sqrt{\ln(3-x^2)}$,

$$y' = \left(5^{ctg\,2x}\right)' - \left(\sqrt{\ln(3-x^2)}\right)' = 5^{ctg\,2x}\ln 5\cdot\left(ctg2x\right)' - \frac{\left(\ln(3-x^2)\right)'}{2\sqrt{\ln(3-x^2)}} =$$

$$= 5^{ctg\,2x}\ln 5\cdot\left(\frac{-2}{\sin^2 2x}\right) - \frac{1}{2\sqrt{\ln(3-x^2)}}\cdot\frac{-2x}{3-x^2};$$

б) $y = \sqrt[5]{x}\arccos 4x$, $y' = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)'\arccos 4x + \sqrt[5]{x}\left(\arccos 4x\right)' =$

$$= \frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}}\arccos 4x + \sqrt[5]{x}\,\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}.$$

3 Похідна неявно заданої та параметричної функції. Логарифмічне диференціювання.

Перейдемо до розгляду питання диференціювання функція, яка задана неявно.

Якщо функція задана неявно, тобто рівнянням виду $F(x,y)=0$ або $F(x,y)=\Phi(x,y)$, то треба продиференціювати ліву і праву частини цього рівняння, розглядаючи y як складену функцію від x, тобто застосовуючи правило диференціювання складеної функції, а потім з отриманої рівності виразити y'.

Зауваження 1. Похідна неявної функції $y = y(x)$, в загальному випадку, виражається не тільки через значення аргументу x, а й через значення функції y при даному значенні x.

Приклад 3. Знайти похідну функції $tg\,(2x-y) = x^2 y$.

Розв'язання. $tg\,(2x-y)=x^2y$, $tg\,(2x-y)-x^2y=0$,

$$\left(tg\,(2x-y)\right)'-\left(x^2y\right)'=\left(0\right)',\quad \frac{(2x-y)'}{\cos^2(2x-y)}-\left(x^2\right)'y-x^2y'=0,$$

$$\frac{2-y'}{\cos^2(2x-y)}-2xy-x^2y'=0,\quad \frac{2}{\cos^2(2x-y)}-\frac{y'}{\cos^2(2x-y)}-2xy-x^2y'=0,$$

$$\frac{y'}{\cos^2(2x-y)}+x^2y'=\frac{2}{\cos^2(2x-y)}-2xy,$$

$$y'\left(\frac{1}{\cos^2(2x-y)}+x^2\right)=\frac{2}{\cos^2(2x-y)}-2xy,$$

$$y'\left(\frac{1+x^2\cos^2(2x-y)}{\cos^2(2x-y)}\right)=\frac{2-2xy\cos^2(2x-y)}{\cos^2(2x-y)},$$

$$y'\left(\frac{1+x^2\cos^2(2x-y)}{\cos^2(2x-y)}\right)=\frac{2-2xy\cos^2(2x-y)}{\cos^2(2x-y)},\quad y'=\frac{2-2xy\cos^2(2x-y)}{1+x^2\cos^2(2x-y)}.$$

Існує ще одна технологія диференціювання, яку називають *логарифмічним диференціювання*, якою користуються для знаходження похідної від степенево-показникої функції $y=\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}$ або коли задана функція представлена більш ніж двома множниками, наприклад, $y=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)\cdot\ldots$. Для цього:

1) логарифмують ліву і праву частини відповідного рівняння за основою e;

2) диференціюють обидві частини отриманого рівняння та виражають y';

3) у співвідношення для похідної y' замість y підставити заданий вираз для функції.

Приклад 4. Продиференціювати функції а) $y=tgx^{\sqrt{x}}$, б) $y = \dfrac{(4x+1)^3\ e^{5x^3}}{\log_5(x+4)}$.

Розв'язання. а) $y = tgx^{\sqrt{x}}$, $\ln y = \ln\left(tgx^{\sqrt{x}}\right)$, $\ln y = \sqrt{x}\cdot\ln(tgx)$,

$$(\ln y)' = \left(\sqrt{x}\cdot\ln(tgx)\right)',\ \frac{y'}{y} = \frac{\ln(tgx)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{tgx\cdot\cos^2 x},$$

$$y' = \left(\frac{\ln(tgx)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{tgx\cdot\cos^2 x}\right)\cdot y,\ y' = \left(\frac{\ln(tgx)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{tgx\cdot\cos^2 x}\right)\cdot tgx^{\sqrt{x}};$$

б) $y = \dfrac{(4x+1)^3\ e^{5x^3}}{\log_5(x+4)}$, $\ln y = \ln\dfrac{(4x+1)^3\ e^{5x^3}}{\log_5(x+4)}$,

$$\ln y = \ln(4x+1)^3 + \ln e^{5x^3} - \ln\log_5(x+4),$$

$$\ln y = 3\ln(4x+1) + 5x^3 - \ln\log_5(x+4),$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{12}{4x+1} + 15x^2 - \frac{1}{\log_5(x+4)}\cdot\frac{1}{(x+4)\ln 5},$$

$$y' = \left(\frac{12}{4x+1} + 15x^2 - \frac{1}{\log_5(x+4)}\cdot\frac{1}{(x+4)\ln 5}\right)\frac{(4x+1)^3\ e^{5x^3}}{\log_5(x+4)}.$$

Теорема 3 *(похідна параметрично заданої функції).* Нехай функцію $y = f(x)$ задано у параметричному вигляді: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, де t називають параметром. Якщо функції $\psi(t)$ і $\varphi(t)$ диференційовані на інтервалі $(\alpha;\beta)$ і функція $\varphi(t)$ має обернену, причому $\varphi_t'(t) \neq 0$, то похідна функції $y = f(x)$ знаходиться як відношення $y_x' = \psi'(t)/\varphi'(t) = y_t'/x_t'$. (Без доведення)

Зауваження 2. Похідна параметрично заданої функції також є параметрично заданою функцією: $y_x' = y_t'/x_t'$; $x = x(t)$.

Приклад 5. Знайти кут нахилу α дотичної до графіка функції $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, де $0 \le t \le \pi$, у точці, яка відповідає значенню параметра $t_0 = \pi/4$. Скласти рівняння дотичної.

Розв'язання. Знайдемо координати точки дотику $M_0(x_0;\, y_0)$:

$x_0 = a\cos t_0 = a\cos(\pi/4) = \sqrt{2}\,a/2$; $y_0 = a\sin t_0 = a\sin(\pi/4) = \sqrt{2}\,a/2$.

Відшукаємо похідну функції заданої параметрично:

$$y'_x = (a\sin t)'_t/(a\cos t)'_t = (a\cos t)/(a\sin t) = -ctg\,t;$$

та обчислимо кутовий коефіцієнт дотичної:

$$tg\,\alpha = y'_{x0} = -ctg(\pi/4) = -1.$$

Звідси $\alpha = 135^0 = 3\pi/4$. Тоді рівняння дотичної знаходимо у вигляді

$$y - y_0 = y'(x_0)\cdot(x - x_0);$$

й отримуємо відповідь

$$y - \sqrt{2}\,a/2 = -1\cdot\left(x - \sqrt{2}\,a/2\right);\quad y = -x + \sqrt{2}\,a.$$

4 Диференціал функції, його геометричний зміст. Застосування диференціалу при наближених обчисленнях

Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, визначена на проміжку $(a;b)$ і неперервна у деякій фіксованій точці x цього проміжку, і нехай приросту аргументу Δx відповідає приріст функції $\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, який є функцією аргументу Δx.

Якщо для приросту функції Δy існує таке число A, що приріст функції можна записати у вигляді $\Delta y = A \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$, де множник $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x)$ задовольняє рівності $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$, то кажуть, що функція $y = f(x)$ *диференційована у точці* x. Головна частина $dy = A \cdot \Delta x$ приросту функції Δy, яка прямо пропорційна приросту аргументу Δx, називається *диференціалом функції.*

Теорема 4 *(зв'язок між похідною та диференціалом)*. Щоб функція $y = f(x)$ у точці x була диференційована, необхідно і достатньо, щоб вона мала у цій точці скінченну похідну $f'(x)$. Якщо виконується ця умова, то $dy = f'(x) \cdot \Delta x$.

Тут Δx не обов'язково нескінченно мала; але якщо Δx – нескінченно мала, то й dy – нескінченно мала. Саме у цих випадках dy (за умови, що $f'(x) \neq 0$) є головною частиною нескінченно малого приросту функції Δy.

Диференціалом незалежної змінної x називають її приріст Δx, тобто $dx = \Delta x$. З урахуванням цієї рівності, маємо $dy = f'(x) \cdot dx$. Тоді $f'(x) = dy/dx$.

Тобто, похідна дорівнює відношенню диференціалів функції та аргументу. Правила обчислення диференціалів і диференціали основних елементарних функцій аналогічні відповідним формулам для похідних (Додаток Е).

Приклад 6. Знайти диференціал функції:

$$y = e^{\sin x} \cdot \ln^2 x.$$

Розв'язання:

$$dy = d\left(e^{\sin x} \cdot \ln^2 x\right) = \ln^2 x \cdot d\left(e^{\sin x}\right) + e^{\sin x} \cdot d\left(\ln^2 x\right) =$$
$$= \ln^2 x \cdot e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot dx + e^{\sin x} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx.$$

Геометрична інтерпретація диференціалу. Нехай $y = f(x)$ – деяка диференційована функція, $M(x_0, y_0)$ – точка, що належить графіку функції,

$$y_0 = f(x_0).$$

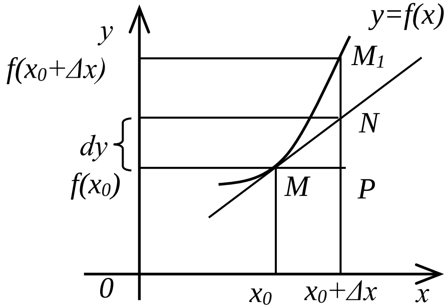


Рисунок 2

Проведемо через точку M (рисунок 2) дотичну до графіка функції.

Кутовий коефіцієнт нахилу дотичної (тангенс кута нахилу α) дорівнює значенню похідної $f'(x_0)$. Якщо аргументу функції надати приріст Δx, то приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. На рисунку 2 приріст функції Δy – довжина відрізка M_1P. При цьому приріст дотичної дорівнюватиме довжині відрізка NP. Обчисливши NP як катет прямокутного трикутника MNP, маємо

$$NP = MP \cdot tg\,\alpha = f'(x_0)\Delta x.$$

За означенням диференціала $f'(x_0)\Delta x = dy$. Таким чином, якщо $\Delta y = M_1P$ – приріст ординати графіка функції, то *диференціал* $dy = NP$ *є приростом ординати дотичної.*

Теорема 5 *(інваріантність форми диференціалу).* Нехай $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ – деякі диференційовані функції зазначених аргументів такі, що з них можна утворити складену функцію $y = f(\varphi(x))$. Диференціал складеної функції визначається рівністю $dy = y'_u \cdot du$. Тобто, форма диференціалу функції не залежить від того, є аргумент незалежною змінною чи функцією іншого аргументу.

Застосовують диференціал у наближених обчисленнях. Для цього керуються таким твердженням: при достатньо малому Δx можна замінити приріст функції її диференціалом, тобто $f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) \approx f'\left(x_0\right)\Delta x$. Тоді наближене шукане значення функції можна знайти за формулою

$$f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\Delta x .$$

Зауваження 3. Нажаль, ця формула не дозволяє оцінити похибку отриманого наближення.

Приклад 7. Обчислити наближено $\sin 31^\circ$.

Розв'язання: Розглядатимемо функцію $\sin x$ у точці $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$, що відповідає 30°; $\Delta x = \dfrac{\pi}{180} = 1^0$; $x_0 + \Delta x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{180}$, що відповідає 31°. Тоді

$$\sin 31^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx$$

$$\approx 0{,}5 + 0{,}866 \cdot 0{,}0175 \approx 0{,}5152 .$$

ЛЕКЦІЯ 4

План лекції

1. Правило Лопіталя.
2. Інтервали монотонності функції. Точки екстремуму. Необхідна і достатні умови екстремуму. Напрямки опуклості та угнутості графіка функції. Точки перегину. Асимптоти функції.
3. Застосування похідної для дослідження еластичності попиту на послуги в готельно-ресторанному господарстві та аналіз витрат у сфері обслуговування доходів, прибутку тощо.

1 Правило Лопіталя

Раніше ми же розглядали питання обчислення границь функції, зокрема розкриття деяких видів невизначеностей. Тепер ми зможемо для цього скористатися поняттям похідної та ознайомитися з правилом Лопіталя – Бернулі. Це правило є ефективним засобом знаходження границь функції саме у тому випадку, коли аргумент функції необмежено зростає або прямує до значення, яке не належить до області визначення цієї функції.

Теорема 1. Границя відношення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих функції дорівнює границі відношення похідних цих функцій, якщо вона існує або дорівнює нескінченості. (Без доведення).

Тобто, якщо

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left|\frac{0}{0}\right| \textit{або} \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Зауваження 1. Звертаємо на увагу на те, що в правій частині похідних знаходиться окремо від чисельника та знаменника, тобто відношення похідних функцій, а не похідна частки (відношення).

Приклад 1. Знайти: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{tg3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{3x}}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\cdot\sin 2x - x}{3x^2 - x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$.

Розв'язання. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{tg3x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\arcsin 2x)'}{(tg3x)'} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}}{\dfrac{3}{\cos^2 3x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 3x}{3\sqrt{1-4x^2}} = \frac{2}{3};$$ б) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{3x}}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(2^{3x}\right)'}{x'} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot 2^{3x}\ln 2}{1} = \infty;$$ в) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\sin 2x - x}{3x^2 - x^3} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x\cdot\sin 2x - x\right)'}{\left(3x^2 - x^3\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\sin 2x + 2e^x\cdot\cos 2x - 1}{6x - 3x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x\cdot\sin 2x + 2e^x\cdot\cos 2x - 1\right)'}{\left(6x - 3x^2\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\sin 2x + 4e^x\cdot\cos 2x - 4e^x\cdot\sin 2x}{6 - 6x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$ г) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)'}{\left(\sqrt{x-1}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}} = 1.$$

Зауваження 2. Як бачимо з прикладу 1 (в), інколи правило Лопіталя необхідно використовувати декілька разів, але при цьому, слід попередньо спростити дріб та кожен раз перед використання правила перевіряти наявність невизначеності.

Зауваження 3. Інколи застосування правила Лопіталя є недоцільним, як у прикладі 1 (г), тоді, слід пам'ятати, що застосування правило можна поєднувати з елементарними засобами знаходження границь, які були розглянуті раніше (лекція 3).

До попередніх випадків приводяться інші види невизначеностей, які зазвичай позначаються, як то

а) $\infty-\infty$; б) $0\cdot\infty$; в) 0^0; г) ∞^0; д) 1^∞.

З'ясуємо особливості розкриття зазначених вище невизначеностей:

а) границя різниці двох нескінченно великих величин: функція представлена у вигляді різниці двох функцій, невизначеність $\infty-\infty$, то перш ніж застосовувати правіло Лопіталя потрібно привести дробі до спільного знаменника, наприклад,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\left|\infty-\infty\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\sin x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x+x\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0;$$

б) границя добутку нескінченно малої і нескінченно великої величини: функція представлена у вигляді добутку двох функцій, невизначеність $0\cdot\infty$, тож, спочатку треба перетворити добуток на частку, замінивши одну з функцій на обернену, тобто

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left|\frac{0}{0}\right| або \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'},$$

наприклад,

$$\lim_{x\to\pi}(1+\cos x)ctgx = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{tgx} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x)'}{(tgx)'} =$$

$$= \lim_{x\to\pi}\frac{-\cos x\cdot\cos^2 x}{1} = 1;$$

в), г), д) випадки знаходження границі степенево-показникової функції, тож перед застосування правила Лопіталя потрібно попередньо прологарифмувати функцію,

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = A,\ \ln A = \ln\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x),$$

наприклад,

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^{\ln x} = \left|0^0\right| = A,\ \ln A = \lim_{x\to 1}\ln(x-1)^{\ln x} = \lim_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1) = |0\cdot\infty| =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 1}\frac{(\ln(x-1))'}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'} = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln^2 x}{x-1} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 1}\frac{(x\ln^2 x)'}{(x-1)'} =$$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln^2 x + 2\ln x}{1} = 0$, тобто $\ln A = 0$, враховуючи, що $A = e^{\ln A}$, маємо остаточну відповідь: $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{\ln x} = e^0 = 1$.

2 Інтервали монотонності функції. Точки екстремуму. Необхідна і достатні умови екстремуму. Напрямки опуклості та угнутості графіка функції. Точки перегину. Асимптоти функції

Вивчення якісної сторони будь-яких явищ природи призводить до встановлення й вивчення функціональної залежності між певними змінними величинами, які беруть участь у цьому явищі та впливають деяким чином на його протікання. Якщо таку функціональну залежність можна записати аналітично, тобто у вигляду деякої формули, то ми можемо дослідити цю функціональну залежність засобами математичного аналізу. Тож, розглянемо питання дослідження функції, в якому ключову роль відіграє саме поняття похідної функції.

Функція називається *зростаючою* (рисунок 1,а) в деякому інтервалі, якщо для будь-яких значень x_1 та x_2, що належать цьому інтервалу із нерівності $x_1 < x_2$ є справедливою нерівність

$$f(x_1) < f(x_2).$$

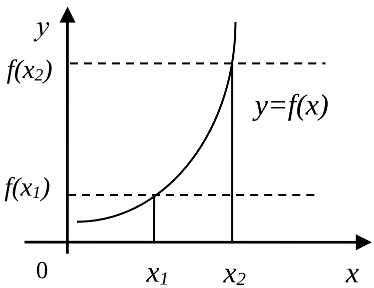


Рисунок 1,а

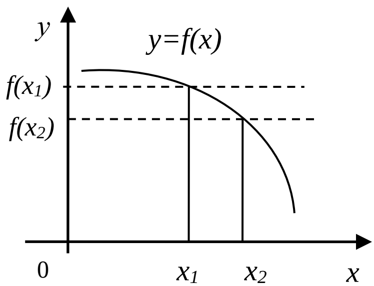


Рисунок 1,б

Функція називається *спадаючою* (рисунок 1,б) в деякому інтервалі, якщо для будь-яких значень x_1 та x_2, що належать цьому інтервалу із нерівності $x_1 < x_2$ є справедливою нерівність

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Умови зростання та спадання функції (достатні умови монотонності та сталості). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована в усіх його внутрішніх точках. Якщо для всіх $x \in (a;b)$ похідна $f'(x)$:

1) додатна, то функція на цьому відрізку зростає;

2) від'ємна, то функція на цьому відрізку спадає;

3) дорівнює нулю, то функція на цьому відрізку – стала.

Зауваження 4. Розглядаємо монотонність у строгому розумінні.

Зауваження 5. При розв'язанні задач, в яких треба визначити інтервали зростання і спадання функції, потрібно визначити область існування цієї функції.

Точка x_0 називається *точкою мінімуму* (відповідно *точкою максимуму*), якщо для всіх $x \neq x_0$ з деякого околу цієї точки x_0 виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$ (відповідно $f(x_0) > f(x)$). Точки обох типів – мінімуму $x_{\min}$ та максимуму $x_{\max}$ – називають *точками екстремуму*, а значення функції $y = f(x)$ в точках екстремуму – *екстремальними значеннями* (*екстремумами*) *функції* відповідного типу:

$$y_{\min} = f(x_{\min}); \quad y_{\max} = f(x_{\max}),$$

при цьому точка x_0 це будь-яка точка деякого інтегралу, що йому належить.

Зауваження 6. Слід взяти до уваги наступне: по-перше, максимум (мінімум) не є обов'язково найбільшим (найменшим) значенням, яке приймає функція. За околом точки x_0 функція може приймати більші (менші) значення, ніж у цій точці; по-друге, функція може мати декілька максимумів і мінімумів; по-третє, функція, яка визначена на відрізку, може досягати екстремуму тільки у внутрішніх точках цього відрізку.

Необхідна ознака екстремуму. Функція може мати екстремум лише в тих точках області її визначення, в яких похідна дорівнює нулю, або не існує. Такі точки називають *критичними точками* аргументу екстремуму.

Зауваження 7. Треба пам'ятати, що ця ознака екстремуму є тільки необхідною, але недостатньою: похідна функції може дорівнювати нулю, нескінченності або не існувати не тільки в тих точках, в яких функція досягає екстремуму. Тому, знайшовши критичні точки, в яких функція може досягти максимуму, треба кожну з них окремо дослідити за допомогою достатніх умов існування екстремуму.

Перша достатня умова екстремуму функції. Якщо у точці x_0 похідна функції $y = f(x)$ дорівнює нулю та змінює знак похідної під час переходу через цю точку, то $f(x_0)$ – екстремум функції, при цьому: якщо знак похідної змінюється з «$+$» на «$-$», то в точці x_0 функція має максимум; якщо знак похідної змінюється з «$-$»на «$+$» , то в точці x_0 - мінімум.

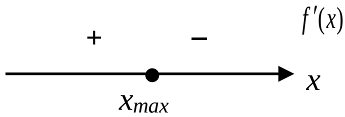


Рисунок 2,а

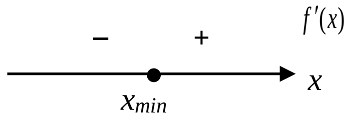


Рисунок 2,б

Приклад 2. Дослідити на монотонність і екстремум функцію $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$.

Розв'язання: Визначимо область допустимих значень: $D(x): x \in (-\infty, +\infty)$; $E(y): y \in (-\infty, +\infty)$. Тепер знайдемо першу похідну заданої функції:

$$y'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24,$$

$$y'(x) = 4(x^3 - 6x^2 + 11x - 6).$$

Знайдемо критичні точки функції, для цього прирівняємо знайдену похідну до нуля, та розв'яжемо рівняння:

$$4(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 0\ ,\ x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x -$$

$$-6 = 0,\ (x-1)(x-2)(x-3) = 0,\ x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3.$$

Знайдені критичні точки нанесемо на координатну пряму та визначимо знак похідної на кожному з отриманих інтервалів (рисунок 3),

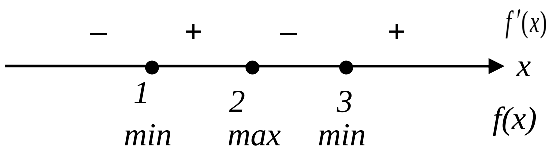


Рисунок 3

знайдемо екстремуми функції:

$$x_{\min} = 1 \Rightarrow y_{\min} = y(1) = 1^4 - 8\cdot 1^3 + 22\cdot 1 - 24 + 12 = 3,$$

$$x_{\max} = 2 \Rightarrow y_{\max} = y(2) = 2^4 - 8\cdot 2^3 + 22\cdot 4 - 24\cdot 2 + 12 = 4,$$

$$x_{\min} = 3 \Rightarrow y_{\min} = y(3) = 3^4 - 8\cdot 3^3 + 22\cdot 9 - 24\cdot 3 + 12 = 137\,.$$

Отже, точки мінімуму $(1;3)$ і $(3;137)$; точка максимуму $(2;4)$. Функція зростає при $x \in (1;2)$ і $x \in (3;+\infty)$; функція спадає при $x \in (-\infty;1)$ і $x \in (2;3)$.

Друга достатня умова екстремуму функції. Якщо у точці x_0 перша похідна функції $y = f(x)$ дорівнює нулю, а друга похідна (додаток Д) відрізняється від нуля, то x_0 буде точкою екстремуму, як то: x_0 – точка максимуму, якщо $f''(x_0) < 0$ або x_0 – точка мінімуму, якщо $f''(x_0) > 0$.

Приклад 3. Дослідити на екстремум функцію

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{4}\,.$$

Розв'язання. Скористаємось другою достатньою умовою екстремуму. Знайдемо першу похідну та визначимо критичні точки

$$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6,\;\; f'(x) = 0,\;\; x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0\,.$$

Рівняння розв'яжемо за допомогою теореми Безу, згідно неї встановлено, що перший корінь $x = 1$, розділивши «кутом» многочлен $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ на многочлен $x - 1$, отримаємо розкладання на множники

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3),$$

звідси $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Знайдемо другу похідну та обчислимо її значення в знайдених критичних точках

$f''(x)=3x^2-12x+11$, $f''(1)=3-12+11=2>0$, $f''(2)=12-24+11=-1<0$,

$$f''(3)=27-36+11=2>0.$$

Отже, задана функція у точці $x_2=2$ має максимум, а точках $x_1=1$ й $x_3=3$ мінімум. Обчислимо значення екстремумів:

$$y_{\min}=y(1)=\frac{1^4}{4}-2\cdot 1^3+\frac{11}{2}\cdot 1^2-6+\frac{9}{4}=0,$$

$$y_{\min}=y(3)=\frac{1\cdot 3^4}{4}-2\cdot 3^3+\frac{11}{2}\cdot 3^2-6\cdot 3+\frac{9}{4}=0,$$

$$y_{\max}=y(2)=\frac{1\cdot 2^4}{4}-2\cdot 2^3+\frac{11}{2}\cdot 2^2-6\cdot 2+\frac{9}{4}=\frac{1}{4}.$$

Як було зазначено у зауваження 6, точки екстремуму не є обов'язково найбільшим (найменшим) значення має функція, тож з'ясуємо як визначити найбільше та найменше значеннями неперервної функції $y=f(x)$ на заданому відрізку $[a;b]$. Для цього використаємо наступний алгоритм:

1) знайти всі критичні точки першої похідної $f'(x)$, що лежать усередині відрізка $[a;b]$;

2) обчислити значення функції $y=f(x)$ в знайдених критичних точках і на кінцях відрізку;

3) з усіх отриманих значень функції вибрати найбільше і найменше.

Приклад 4. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=\frac{\ln x}{x}$ на відрізку $[1;4]$.

Розв'язання. Спочатку встановимо критичні точки:

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2},\ \frac{1-\ln x}{x^2} = 0,\ \begin{cases} 1-\ln x = 0 \\ x \neq 0 \end{cases},\begin{cases} x = e \approx 2{,}7 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Обчислимо значення функції в отриманій критичній точці $x = e$ та на кінцях відрізку, тобто при $x = 1$, $x = 4$, та виберемо найбільше та найменше значення функції:

$$y(1) = \frac{\ln 1}{1} = 0,\ y(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e},\ y(4) = \frac{\ln 4}{4}.$$

Отже, $y_{найь}(1) = y_{\min[1;4]}(1) = 0$ – найменше значення функції, $y_{найб}(e) = y_{\max[1;4]}(e) = \frac{1}{e}$ – найбільше значення функції.

Приклад 5. Знайти найменшу довжину паркану l, за допомогою якого можна обмежити ділянку у формі прямокутника, площа якого становить S.

Розв'язання. Як відомо, площа прямокутника, тобто нашої ділянки: $S = a \cdot b$, де a – це довжина ділянки, b – її ширина; довжина паркану l, який має обмежувати цю ділянку – це є периметр прямокутника, який дорівнює: $l = 2a + 2b$.

Позначимо довжину змінною x, тоді ширина буде $l - 2x$, площа ділянки матиме вираз: $S = x \cdot (l - 2x)$, а довжина паркану $l = 2x + \frac{S}{x}$. Наша задача приводиться до задачі на відшукання найменшого значення цієї функції коли x змінюється від 0 до ∞, тобто функція $l \to \infty$ коли $x \to 0$ та коли $x \to \infty$. Отже, відповідь задачі слід шукати серед найменших значень функції на проміжку $x \in (0;\infty)$.

Знайдемо похідну функції $l'_x = 2 - \frac{s}{x^2}$. Критичними точками є $x = \pm\sqrt{\frac{S}{2}}$, але лише одна точка належить до потрібного нам проміжку і це $x = \sqrt{\frac{S}{2}}$, в якій функція має мінімальне значення, оскільки $l' < 0$, коли $x < \sqrt{\frac{S}{2}}$ та $l' > 0$, коли $x > \sqrt{\frac{S}{2}}$. Мінімальним значенням $l_{\min} = 2\sqrt{2S}$ у даному випадку є найменшим значенням функції на всьому проміжку $x \in (0;\infty)$.

Таким чином, який би паркан, що обмежує цю прямокутну ділянку, не було встановлено, його довжина не може бути меншою $2\sqrt{2S}$ і може дорівнювати цьому значенню тоді, коли одна сторона прямокутника в двічі більша за його більшу сторону. Ось так можна встановити та обґрунтувати вибір економічного паркану.

Надамо визначення поняття опуклість (вгнутість) функції.

Графік функції $y = f(x)$ називається опуклим вгору (або вгнутим вниз) на деякому проміжку $(a;b)$, якщо відповідна дуга кривої розташована вище дотичної у будь-якій точці $M_0(x_0; f(x_0))$ цієї дуги (рисунок 4).

Графік функції $y = f(x)$ називається опуклим вниз (або вгнутим вгору) на деякому проміжку $(a;b)$, якщо відповідна дуга кривої розташована вище дотичної у будь-якій точці $M_0(x_0; f(x_0))$ цієї дуги (рисунок 5).

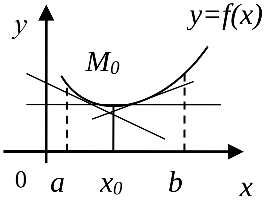


Рисунок 4

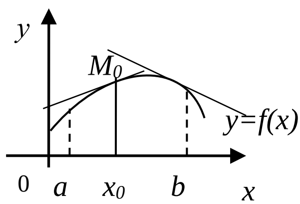


Рисунок 5

Достатня умова опуклості (угнутості) кривої: якщо друга похідна функції $y = f(x)$ додатна всередині проміжку $(a;b)$, то графік функції опуклий вгору на даному проміжку; якщо друга похідна $f''(x)$ (додаток Д) від'ємна всередині проміжку $(a;b)$, то графік функції опуклий вниз на цьому проміжку.

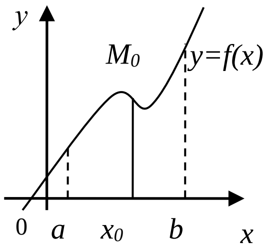


Рисунок 6

Точкою перегину неперервної кривої $y = f(x)$ називається точка $M_0(x_0; f(x_0))$ (рисунок 6) при переході через яку, крива змінює опуклість на угнутість, або навпаки. Для абсциси точки перегину x_0 графіка функції $y = f(x)$ друга похідна дорівнює нулю або не існує (це є *необхідною умовою існування точки перегину*). Точки, в яких друга похідна дорівнює нулю або не існує, називають *критичними точками другого роду*. Але, слід пам'ятати, що ці точки є лише «підозрілими» точками на наявність в них перегину. Для остаточного вирішення питання про наявність перегину у цій точці, треба скористатися *достатньою умовою точки* *перегину*. Для цього після встановлення критичних точок другого роду, треба перевірити знак другої похідної поблизу цих точок, аналогічно як це виконувалось під час дослідження функції на екстремум. Тож, якщо друга похідна $f''(x)$ при переході через критичну точку x_0, міняє знак, то $M_0(x_0; f(x_0))$ – точка перегину.

Приклад 6. Визначити інтервали опуклості кривої

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}.$$

Розв'язання. Визначимо область визначення функції: $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$. Встановимо критичні точки другого роду, для цього знайдемо похідну першого порядку, потім другого порядку та прирівняємо другу похідну до нуля

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}, \quad f''(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3},$$

$$f''(x) = 0; \quad \frac{2}{x^3} = 0, \quad x \neq 0.$$

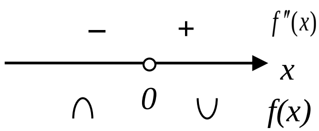


Рисунок 7

З'ясуємо знак другої похідної на кожному з інтервалів (рисунок 7).

Як бачимо, у точці нуль друга похідна змінює знак, але в цій точці функція невизначена, тож графік функції має розрив у цій точці. На інтервалі $x \in (-\infty,0)$ графік функціє випуклий вгору, а на інтервалі $x \in (0,+\infty)$ – випуклий вниз.

Асимптотою до графіку функції $y = f(x)$ називається пряма до якої необмежено наближається точка кривої при необмеженому віддалені цієї точки від початку координат.

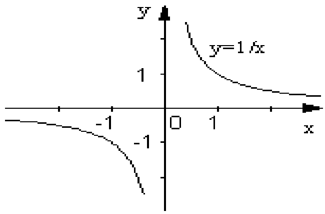


Рисунок 8

Прикладом асимптот є вісі координат, тобто прямі $y=0$ та до $x=0$, до графіка функції оберненої пропорційності $y=\frac{k}{x}$ (частинний випадок представлено на рисунку 8).

Знання про нескінчені гілки функції (так інколи називають асимптоти) необхідно для того, щоб правильно уявити конфігурацію графіка функції та з'ясувати як поводиться функція у всій області визначення.

Асимптоти бувають *вертикальні* та *похилі*, а також й *горизонтальні*, які є частинним випадком похилих асимптот. Вертикальні асимптоти розташовані у точках розриву функції, тобто в точках, в яких функція невизначена. Тож, для того, щоб знайти вертикальні асимптоти, треба з'ясувати область визначення функція, встановити наявні точки розриву та обчислити границю функції в околі цих точок. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то пряма $x=a$ є вертикальною асимптотою кривої $y=f(x)$. Рівняння похилих асимптот (їх дві: права та ліва) знаходять у вигляді $y=kx+b$, де $k-$ кутовий коефіцієнт прямої, $b-$ вільний доданок. Якщо існують границі

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k_1,\ \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-k_1x\right]=b_1$$

або

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k_2,\ \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-k_2x\right]=b_2,$$

то пряма $y = k_1 x + b_1$ є правою похилою асимптотою кривої $y = f(x)$, а пряма $y = k_2 x + b_2$ є лівою похилою асимптотою кривої $y = f(x)$. Якщо кутовий коефіцієнт дорівнює нулю, то отримаємо рівняння горизонтальної асимптоти кривої є правою похилою асимптотою кривої $y = f(x)$: $y = b$.

Зауваження 8. Якщо хоча б одна з двох границь для $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ або $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx)$ не існує, то відповідної похилої асимптоти крива не має.

Приклад 7. Знайти асимптоти функції $y = \dfrac{x^2}{x+4}$.

Розв'язання. Дана функція невизначена у точці $x = -4$, маємо

$$\lim_{x\to -4} \frac{x^2}{x+4} = \infty,$$

то пряма $x = -4$ є вертикальною асимптотою кривої $y = \dfrac{x^2}{x+4}$. Відшукаємо похилі асимптоти, для цього обчислимо границю коли $x \to \pm\infty$:

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+4} : x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+4x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^2\right)'}{\left(x^2+4x\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x+4} = 1,$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+4x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(x^2\right)'}{\left(x^2+4x\right)'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{2x+4} = 1.$$

Оскільки $k_1 = k_2$, то права і ліва асимптоти співпадають, отже, маємо

$$b_1 = b_2 = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - k_1 x\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{x+4} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^2 - 4x}{x+4} = -4,$$

й отримуємо, що пряма $y = x - 4$ є похилою прямою.

Завдяки розглянутим нами елементів дослідження функції можна виконати повне її дослідження та побудувати графік, за допомогою якого можна аналізувати та прогнозувати певні процеси. Про повне дослідження функції та побудову її графіку читайте у [1-5; 7; 8; 9; 11].

3 Застосування похідної для дослідження еластичності попиту на послуги в готельно-ресторанному господарстві та аналіз витрат у сфері обслуговування доходів, прибутку тощо

Перейдемо до розгляду задач з економічним контекстом, розв'язання яких виконується за допомогою знання понять диференціального числення.

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Швидкість її зміни визначається, як відомо, похідною $y' = f(x)$. Відносною швидкістю або *темпом зростання функції* називається відношення $\frac{y'}{y}$. Водночас $\frac{y'}{y} = \ln y$.

Отже, темп зростання функції дорівнює її логарифмічній похідній. Наприклад, якщо $\frac{y'}{y} = 0{,}43$, то темп зростання функції становить 43%.

Нехай відома функція $p = p(x)$, якою подається ціна товару. Тоді добуток $p(x) \cdot x$ цієї функції на попит є виручка $U(x)$. Границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U(x)}{\Delta x} = U'(x)$ називаються *граничним виторгом*.

Приклад 8. Залежність фінансових зборів K від обсягу продукції x виражається формулою $K(x)=0{,}04x^2-3x+1000$. При яких значеннях обсягу x фінансові збори почнуть зростати?

Розв'язання. Похідна $K'(x)=0{,}08x-3>0$. Звідси $x>100$. Це означає, що коли обсяг продукції перевищує 100 грн., фінансові збори зростають.

Приклад 9. Нехай сумарні витрати на виробництво x одиниць продукції подаються у вигляді $K(x)=0{,}02x^2+20x+600$. Залежність між ціною p і кількістю x продукції, яку можна продати за цією ціною, така: $p(x)=34-0{,}07x$. При якому x прибуток підприємства буде максимальний і який розмір цього прибутку?

Розв'язання. Якщо відомі ціна та кількість продукції, то виручка

$$U(x)=x\cdot p(x)=34x-0{,}07x^2.$$

Прибуток подається у вигляді: $P(x)=U(x)-K(x)=x\cdot p(x)-K(x)$, де K – повні витрати з виробництва x одиниці продукції. Прибуток максимальний, якщо $P'(x)=0$ і $P''(x)<0$. Звідси випливає, що $U'(x)-K'(x)=0$, або $K'(x)=U'(x)$. Отже, підприємство може одержати максимальний прибуток за такого обсягу x виробництва, при якому гранична виручка дорівнює граничним витратам.

З умови $P''(x)<0$ випливає, що $U''(x)-K''(x)\le 0$ або $U''(x)\le K''(x)$. Оскільки $U'(x)=K'(x)$, то:

$$\frac{U''(x)}{U'(x)} < \frac{K''(x)}{K'(x)}, \text{ або } (\ln U')' < (\ln K')'.$$

Це означає, що підприємство отримує максимальний прибуток, коли темп зростання граничної виручки менший за темп зростання граничних витрат.

В економічних дослідженнях прирости тих чи інших показників, що характеризують економічні процеси найчастіше виражають у відсотках до базових значень. Тому і зміну величин, які зв'язані з ними функціональною залежністю також виражають у відсотках. Для цього використовують поняття еластичності функції, яке виражається через похідну функції.

Нехай задана функція $y = f(x)$. Якщо аргумент x одержав приріст Δx і при цьому функція у одержала приріст Δy, то $\frac{\Delta x}{x}$ називають відносним приростом аргументу, а $\frac{\Delta y}{y}$ – відносним приростом функції.

Границя відношення відносного приросту функції до відносного приросту аргументу при умові, що приріст аргументу прямує до нуля, якщо існує, називається *еластичністю функції.*

Позначають еластичність функції $y = f(x)$ відносно змінної x $E_x(y)$. Тобто,

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot f'(x).$$

Отже, якщо в точці x функція має похідну, то еластичність визначається формулою .

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Еластичність виражає наближений відсоток приросту функції, який відповідає 1% приросту аргументу.

Приклад 10. Знайти еластичність функції $y=x^2-4x+7$ і обчислити її при $x=1$, $x=2$, $x=5$.

Розв'язання. $E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{x}{x^2-4x+7}(2x-4)=\frac{x(2x-4)}{x^2-4x+7}$,

$$E_x\left(y/_{x=1}\right)=\frac{1\cdot(2-4)}{1-4+7}=-0{,}5;\ E_x\left(y/_{x=2}\right)=\frac{2\cdot(2\cdot 2-4)}{4-8+7}=0;$$

$$E_x\left(y/_{x=5}\right)=\frac{5\cdot(10-4)}{25-20+7}=2{,}5.$$

Отже, якщо x зросте на 1% з 1 до $1{,}01$, то у спаде на $0{,}5\%$. Якщо x зросте на 1% з 2 до $2{,}02$, то значення змінної у практично не зміниться. Якщо х зросте на 1% з 5 до $5{,}05$, то y зросте на $2{,}5\%$.

Розглянемо *властивості еластичності функції*.

Теорема 2. Еластичність добутку двох функцій дорівнює сумі еластичностей співмножників:

$$E_x(uv)=E_x(u)+E_x(v).$$

Доведення. За означенням еластичності

$$E_x(uv)=\frac{x}{uv}(uv)'=\frac{x}{uv}(u'v+v'u)=\frac{xu'v}{uv}+\frac{xv'u}{uv}=$$

$$=\frac{xu'}{u}+\frac{xv'}{v}=E_x(u)+E_x(v).$$

Теорема 3. Еластичність частки двох функцій дорівнює різниці показників еластичності діленого і дільника:

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right)=E_x(u)-E_x(v).$$

(Довести самостійно).

Під час економічного аналізу і прогнозування цінової політики застосовується поняття еластичності попиту і пропозиції.

Нехай p ціна одного виробу, а Q – кількість виробів, вироблених і проданих за деякий час, що визначає попит. Величина Q залежить від ціни, тобто Q є функцією від p: $Q=f(p)$.

Нехай приріст ціни Δp викликає приріст ΔQ. Тоді відносні прирости ціни і попиту будуть відповідно $\frac{\Delta p}{p}$ і $\frac{\Delta Q}{Q}$. Відношення $\frac{\Delta p}{p}:\frac{\Delta Q}{Q}$ показує відносну зміну попиту, якщо ціна виробу зросла на 1%.

Еластичністю попиту відносно ціни називається границя відношення відносного приросту попиту до відносного приросту ціни при умові, що приріст ціни прямує до нуля.

$$\eta=E_p(Q)=\lim_{\Delta p\to 0}\frac{\Delta Q}{Q}:\frac{\Delta p}{p}=\frac{p}{Q}\lim_{\Delta p\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta p}=\frac{p}{Q}\cdot\frac{dQ}{dp}.$$

Еластичність попиту відносно ціни наближено визначає, як змінюється попит на даний виріб, якщо його ціна зростає на 1%. Так, наприклад, якщо зростання ціни на 5% викликає спадання попиту на 9%, то еластичність буде $\eta=\frac{-9}{5}=-1{,}8$.

Якщо еластичність попиту $\eta = -0{,}7$, то 10% зростання вартості товару викликає спадання попиту на $(-0{,}7)\cdot 10\% = -7\%$.

Якщо відсоток зміни попиту більше відсотка зміни ціни ($\eta < -1$), то попит називають *еластичним,* якщо відсоток зміни попиту менше відсотка зміни ціни ($-1 < \eta < 0$), то попит називають *не еластичним,* а якщо відсоток зміни попиту рівний відсотку зміни ціни ($\eta = -1$), то попит називають *нейтральним.*

Приклад 13. Встановлено, що кількість вироблених і проданих виробів Q за ціною p визначається за формулою $Q = 10000 - 500p$ ($0 < p < 20$). Визначити при якій ціні попит еластичний, нейтральний, не еластичний.

Розв'язання. Еластичність попиту відносно ціни

$$\eta = \frac{p}{Q}\cdot\frac{dQ}{dp} = \frac{p}{10000 - 500p}\cdot(-500) = -\frac{p}{20-p}$$

Попит буде еластичним, якщо $\eta < -1$, $-\dfrac{p}{20-p} < -1$.

Звідси, враховуючи, що $20 - p > 0$, маємо $\dfrac{p}{20-p} > 1$; $p > 20 - p$, $2p > 20$, $p > 10$. Отже, попит еластичний при ціні $10 < p < 20$ (грн.).

$-\dfrac{p}{20-p} = -1$, $p = 20 - p$, $2p = 20$, $p = 10$. Попит нейтральний при ціні $p = 10$ (грн.). Попит буде не еластичний, коли $-1 < \eta < 0$.

$$-\frac{p}{20-p} > -1,\ \frac{p}{20-p} < 1,\ p < 20 - p,\ 2p < 20,\ p < 10$$

$$-\frac{p}{20-p}<0\,,\;\; p>0\,.$$

Отже, попит не еластичний при ціні меншій 10 грн. за виріб.

Приклад 14. Встановити зв’язок між доходом підприємства та еластичністю попиту від ціни.

Розв’язання. Дохід визначається як добуток вартості кожного виробу на кількість вироблених і проданих виробів Q:

$$D(Q)=p\cdot Q\,.$$

Знайдемо маржинальний дохід, врахувавши, що Q є функція від p.

$$\frac{dD(Q)}{dp}=Q+p\cdot\frac{dQ}{dp}=Q\left(1+\frac{p}{Q}\cdot\frac{dQ}{dp}\right)=Q(1+\eta)\,.$$

Якщо $\eta\le -1$, то $\eta+1<0$, а $\dfrac{dD(Q)}{dp}<0$. І тому дохід спадає при зростанні p, коли попит еластичний.

Якщо $-1<\eta<0$ то $\eta+1>0$, а $\dfrac{dD(Q)}{dp}>0$. Тобто функція $D(Q)$ доходу зростає з зростанням ціни p, коли попит не еластичний.

Поняття еластичності можна застосовувати і до інших функцій економічного змісту. Розглянемо поняття еластичності пропозиції S в залежності від ціни товару p. Під пропозицією розуміють кількість деякого товару, який пропонується на продаж за одиницю часу. Як правило, пропозиція якого-небудь товару є зростаючою функцією ціни. Але бувають випадки, коли пропозиція підвищується із зниженням ціни. Величина S є функцією від ціни товару. Тобто, $S = S(p)$. Нехай Δp – приріст ціни, а ΔS – відповідний приріст пропозиції. Тоді відносні прирости ціни і пропозиції будуть відповідно $\dfrac{\Delta p}{p}$ і $\dfrac{\Delta S}{S}$.

Еластичністю пропозиції відносно ціни називається границя відношення відносного приросту пропозиції до відносного приросту ціни при умові, що приріст ціни прямує до нуля.

$$E_p(S) = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta S}{S} : \frac{\Delta p}{p} = \frac{p}{S} \cdot \frac{dS}{dp}.$$

Еластичність пропозиції відносно ціни наближено визначає відсоток приросту пропозиції на 1% приросту ціни.

Приклад 15. Функція пропозиції деякого товару $S = \dfrac{4p^2 + 7}{3p + 1}$. Визначити еластичність пропозиції при ціні $p = 2$.

Розв'язання.

$$E_p(S) = \frac{p}{S} \cdot \frac{dS}{dp} = \frac{p(3p+1)}{4p^2+7} \cdot \frac{8p(3p+1) - 3(4p^2+7)}{(3p+1)^2} =$$

$$= \frac{p(12p^2 + 8p - 21)}{(4p^2+7)(3p+1)}.$$

Якщо $p = 2$ то $E_p(S) = \dfrac{2 \cdot (12 \cdot 4 + 8 \cdot 2 - 21)}{(4 \cdot 4 + 7)(3 \cdot 2 + 1)} \approx 0{,}54$.

Отже**,** при ціні $p = 2$ збільшення її на 1% зумовить збільшення пропозиції на $0{,}54\%$.

ЛЕКЦІЯ 5-6

План лекції

1. Поняття первісної та невизначеного інтегралу.
2. Властивості невизначеного інтегралу. Таблиця невизначених інтегралів.
3. Інтегрування методом заміни змінної та інтегрування частинами.
4. Інтегрування найпростіших дробових раціональних функцій. Інтегрування деяких функцій, що містять квадратних тричлен. Інтегрування раціонального дробу за допомогою розкладання його на прості дроби
5. Інтегрування тригонометричних функцій

1 Поняття первісної та невизначеного інтегралу

Раніше нами було розглянуто задачу, в якій було задано функцію $F(x)$ і необхідно було знайти її похідну $f(x) = F'(x)$. Тепер ми будемо розглядати обернену задачу, коли задана функція $f(x)$ й потрібно відшукати таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнюватиме $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

Означення 1. Функція $F(x)$ називають *первісною* від функції $f(x)$ на проміжку X, якщо для всіх точок цього проміжку виконується рівність: $F'(x) = f(x)$.

Наприклад, знайдемо первісну для функції $f(x) = x^2$. Згідно означення такою функцією можна назвати

$F(x)=\frac{x^3}{3}$, тому що $\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{3x^2}{3}=x^2$. Але такими ж первісним функція водночас є функції $\frac{x^3}{3}-7$, $\frac{x^3}{3}+7$, …, оскільки похідна від цих функцій також дорівнює $f(x)=x^2$.

Теорема 1. Якщо $F_1(x)$ та $F_2(x)$ дві первісних від функції $f(x)$ на проміжку X, то різниця між ними дорівнює постійному числу.

З цієї теореми має висновок, що, якщо для деякої функції $f(x)$ первісною є функція $F(x)$, то будь-яка інша первісна має вигляд $F(x)+C$, де $C=const$.

Означення 2. Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то вираз $F(x)+C$ називають *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ і позначають символом $\int f(x)dx$, тобто

$$\int f(x)dx=F(x)+C\text{, якщо } F'(x)=f(x),$$

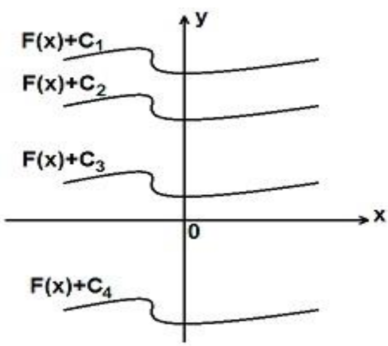


Рисунок 1

де $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз. Таким чином, невизначений інтеграл – це сімейство функції $y=F(x)+C$. З геометричної точки зору, невизначений інтеграл є сукупністю кривих (рисунок 1), кожну з яких отримано завдяки зсуву однієї з кривих паралельно самій собі вниз або вгору, тобто вздовж осі ординат.

Знаходження первісної для заданої функції називають інтегруванням.

Зауваження 1. Не для будь-якої функції існує невизначений інтеграл. Первісна (а, отже, й невизначений інтеграл) існує у тому випадку, коли функція $f(x)$ неперервна на проміжку X. Первісна від елементарних функцій можливо й не буде представлена за допомогою кінцевого числа елементарних функцій.

2 Властивості невизначеного інтегралу. Таблиця невизначених інтегралів

Властивості невизначеного інтегралу:

1. Похідна від невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральній функції
$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$
2. Диференціал від невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральному виразу
$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$
3. Невизначений інтеграл від диференціалу деякої функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої
$$\int dF(x) = F(x) + C.$$
4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми неперервних функцій дорівнює сумі їх невизначених інтегралів
$$\int\left[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\right]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \int f_3(x)dx.$$

5. Постійний множник можна винести за знак невизначеного інтегралу

$$\int C\cdot f(x)dx = C\int f(x)dx .$$

Теорема 2. Якщо аргумент підінтегральної функції лінійний відносно змінної, то справедливі такі формули:

$$\int f(x+b)dx = F(x+b)+C,\ b = const ,$$

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax)+C,\ a = const,$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C .$$

Розглянемо таблицю невизначених інтегралів .

Таблиця 1

Основні невизначені інтеграли			
1	$\int 0\,du = C$	5	$\int \sin u\ du = -\cos u + C$
2	$\int u^{\alpha}\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	6	$\int \cos u\ du = \sin u + C$
2а	$\int du = u + C$	7	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tg\ u + C$
2б	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	8	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\ ctg\ u + C$
2в	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	9	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$
3	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	10	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+b}} = \ln\left\lvert u+\sqrt{u^2+b}\right\rvert + C$
4	$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	11	$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\ arctg\frac{u}{a} + C$

Продовження таблиці 1

4a	$\int e^u\,du = e^u + C$	12	$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$
Додаткові невизначені інтеграли			
1	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert tg\frac{u}{2}\right\rvert + C$	2	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
3	$\int tg u\,du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$	4	$\int ctg u\,du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$
5	$\int sh u\,du = ch u + C$	6	$\int ch u\,du = sh u + C$
7	$\int \frac{du}{ch^2 u} = th\,u + C$	8	$\int \frac{du}{sh^2 u} = -cth\,u + C$
9	$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2\ln\left\lvert u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + C$		
10	$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{a}u\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{u}{a} + C$		
11	$\int e^{au}\sin bu\,du = \frac{-b e^{au}\cos bu + a e^{au}\sin bu}{a^2+b^2} + C$		
12	$\int e^{au}\cos bu\,du = \frac{a e^{au}\cos bu + b e^{au}\sin bu}{a^2+b^2} + C$		

Приклад 1. Знайти невизначені інтеграли

$$\text{а) } \int\left(x^3+\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt[5]{x^2}}\right)dx,\ \text{б) } \int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$$

Розв'язання. а) застосовуємо властивості невизначеного інтегралу та таблицю 1:

$$\int\left(x^3+\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt[5]{x^2}}\right)dx=\int x^3dx+\int\sqrt[3]{x}dx-\int\frac{2}{\sqrt[5]{x^2}}dx=\int x^3dx+\int x^{1/3}dx-$$

$$-2\int x^{-2/5}dx=\frac{x^4}{4}+\frac{x^{1/3+1}}{1/3+1}-2\frac{x^{-2/5+1}}{-2/5+1}+C=\frac{x^4}{4}+\frac{3x^{4/3}}{4}-\frac{10x^{3/5}}{3}+C;$$

б) застосуємо формулу 9 з основної таблиці невизначених інтегралів, але попередньо виконаємо деякі перетворення

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9\left(\frac{4}{9}-x^2\right)}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{4}{9}-x^2\right)}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2} + C\,.$$

3 Інтегрування методом заміни змінної та інтегрування частинами

Метод заміни змінної полягає в тому, щоб за допомогою введення нової змінної заданий інтеграл привести до табличного. Застосовуються цей метод у випадках, коли підінтегральний вираз містить функцію разом з її похідною:

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \left|\begin{matrix} t=\varphi(x) \\ dt=\varphi'(x)dt \end{matrix}\right| = \int f(t)dt = F(t)+C = F(\varphi(x))+C$$

або

$$\int f(x)dx = \left|\begin{matrix} x=\varphi(t); \\ dx=\varphi'(t)dt \end{matrix}\right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = H(t)+C =$$

$$= \left| t=\varphi^{-1}(x) \right| = H\left(\varphi^{-1}(x)\right)+C\,.$$

Приклад 2. Знайти невизначений інтеграл: $\int \frac{e^{tg2x}}{\cos^2 2x}dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{e^{tg2x}}{\cos^2 2x}dx = \int e^{tg2x}\frac{1}{\cos^2 2x}dx = \left|\begin{matrix} t=tg2x \\ dt=\dfrac{2}{\cos^2 2x}dx \Big|:2 \\ \dfrac{dt}{2}=\dfrac{1}{\cos^2 2x}dx \end{matrix}\right| = \int e^t\,\frac{dx}{2} =$$

$$=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{tg2x}+C.$$

У випадках, коли підінтегральний вираз представлено як добуток двох функцій, одна з яких алгебраїчна (наприклад, степенева функція), а друга – трансцендентна (логарифмічна, показникова, тригонометрична або обернена тригонометрична), то застосовують *метод інтегрування частинами*.

Нехай $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – дві неперервні функції, які мають неперервні похідні, тоді

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

Застосовувати цей метод доречно, коли інтеграл праворуч простіший, ніж той, що ліворуч, або йому подібний. Як правило, за u вибирають функцію, яка спрощується при диференціюванні. Тоді за dv – те, що залишилось, але ця частина має містити dx та бути інтегрованою. Саме через це частина dv не має містити такі функції, як: логарифмічні та обернені до тригонометричних. Функцію v знаходять у явному вигляді як одну з первісних $\int dv$ (поклавши $C=0$).

Зауваження 2. Іноді метод інтегрування частинами необхідно застосовувати декілька разів. А інколи призводить до заданого інтегралу, в цьому випадку, такі інтеграли називають *зворотніми*.

Приклад 3. Знайти невизначений інтеграли:

а) $\int x\cdot 2^{3x}dx$; б) $\int x^2\cdot\ln x dx$; в) $\int e^x\cdot\cos 2x dx$.

Розв'язання.

$$\text{а) } \int x\cdot 2^{3x}dx=\left|\begin{array}{l} u=x \\ dv=2^{3x}dx \\ du=dx \\ v=\int 2^{3x}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{3x}}{\ln 2} \end{array}\right|=uv-\int vdu=x\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{3x}}{\ln 2}-$$

$$-\frac{1}{3\ln 2}\int 2^{3x}dx=\frac{x\cdot 2^{3x}}{3\ln 2}-\frac{1}{3\ln 2}\cdot\frac{2^{3x}}{3\ln 2}+C;$$

$$\text{б) } \int x^2\cdot\ln xdx=\left|\begin{array}{l} u=\ln x \\ dv=x^2dx \\ du=\frac{dx}{x} \\ v=\frac{x^3}{3} \end{array}\right|=\frac{x^3}{3}\cdot\ln x-\int\frac{x^3}{3}.\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{3}\cdot\ln x-\frac{x^3}{9}+C;$$

$$\text{в) } \int e^x\cdot\cos 2xdx=\left|\begin{array}{l} u=e^x \\ dv=\cos 2xdx \\ du=e^xdx \\ v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{array}\right|=\frac{e^x}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2x\cdot e^xdx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=e^x \\ dv=\sin 2xdx \\ du=e^xdx \\ v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right|=\frac{e^x}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\left(-\frac{e^x}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\int e^x\cos 2xdx\right)=$$

$$=\frac{e^x}{2}\sin 2x+\frac{e^x}{4}\cos 2x-\frac{1}{4}\int e^x\cos 2xdx.$$

Перенесемо невизначені інтеграли ліворуч та отримаємо остаточну відповідь

$$\frac{5}{4}\int e^x\cos 2x dx=\frac{e^x}{2}\sin 2x+\frac{e^x}{4}\cos 2x;\ \int e^x\cos 2x dx=\frac{2e^x}{5}\sin 2x+5e^x\cos 2x.$$

4 Інтегрування деяких функцій, що містять квадратний тричлен. Інтегрування найпростіших дробових раціональних функцій. Інтегрування раціонального дробу за допомогою розкладання його на прості дробі

Розглянемо інтегрування виразів, що містять у знаменнику квадратний тричлен, тобто інтеграли виду

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}\quad I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$I_3=\int\frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}\quad I_4=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Знаходження інтегралів виду I_1, I_2 приводиться до основних невизначених інтегралів у таблиці 1 №№ 9-12, для цього необхідно в знаменнику вираз ax^2+bx+c доповнити до повного квадрату, а саме:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+R\right), R=-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}.$$

Приклад 4. Знайти $\int\frac{dx}{3x^2-6x+9}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{3x^2-6x+9}=\int\frac{dx}{3(x^2-2x+3)}=\int\frac{dx}{3((x^2-2x+1)-1+3)}=\int\frac{dx}{3((x-1)^2+2)}=$$

$$=\begin{vmatrix} t = x-1 \\ dt = dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{3\left(t^2+2\right)} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,arctg\frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,arctg\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C\ .$$

Знаходження інтегралів виду I_3, I_4 виконуємо так,

по-перше, знаходимо похідну від квадратного тричлену, що розташований у знаменнику: $\left(ax^2+bx+c\right)' = 2ax+b$;

по-друге, завдяки тотожнім перетворенням приводимо знайдену похідну до лінійного виразу, що містив заданий інтеграл у чисельнику: $\frac{A}{2a}\left(2ax+b\right) - \frac{Ab}{2a} + B = Ax+B$;

по-третє, отриманий вираз підставляємо у чисельник, розбиваємо інтеграл на суму двох інтегралів та знаходимо кожен окремо:

$$\int\frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c} = \int\frac{\frac{A}{2a}\left(2ax+b\right) - \frac{Ab}{2a} + B}{ax^2+bx+c}dx = \int\frac{\frac{A}{2a}\left(2ax+b\right)}{ax^2+bx+c}dx + \int\frac{-\frac{Ab}{2a}+B}{ax^2+bx+c}dx\,.$$

Приклад 4. Знайти $\int\frac{(2x+1)dx}{\sqrt{3x^2-6x+9}}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{(2x+1)dx}{\sqrt{3x^2-6x+9}} = \begin{vmatrix} \left(3x^2-6x+9\right)' = 6x-6, \\ \frac{1}{3}\left(6x-6\right)+2+1 = 2x+1 \end{vmatrix} = \int\frac{\frac{1}{3}\left(6x-6\right)+2+1}{\sqrt{3x^2-6x+9}}dx =$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{(6x-6)}{\sqrt{3x^2-6x+9}}dx + \int\frac{2+1}{\sqrt{3x^2-6x+9}}dx = I_1 + I_2\,,$$

$$I_1=\frac{1}{3}\int\frac{(6x-6)}{\sqrt{3x^2-6x+9}}dx=\left|\begin{matrix}t=3x^2-6x+9\\dt=(6x-6)dx\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{2}{3}\sqrt{t}+C=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{3x^2-6x+9}+C\,;$$

$$3\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-6x+9}}=\left|\begin{matrix}3x^2-6x+9=3\left(x^2-2x+3\right)=\\=3\left((x-1)^2+2\right),t=x-1,dt=dx\end{matrix}\right|=\frac{3}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+2}}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{3}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+2}\right|+C=\frac{3}{\sqrt{3}}\ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2+2}\right|+C\,;$$

$$I_1+I_2=\frac{2}{3}\sqrt{3x^2-6x+9}+\frac{3}{\sqrt{3}}\ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2+2}\right|+C\,.$$

Розглянемо інтегрування раціонального дробу.

Означення 3. Раціональним дробом (дробово-раціональною функцією) називається відношення двох многочленів $P_m(x)/Q_n(x)$, де $P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_{m-1}x+a_m$ многочлен степеня m, $Q_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_{n-1}x+b_n$ многочлен степеня n.

Якщо степінь m чисельника нижче степеня знаменника n, то дріб називається *правильним*, якщо, навпаки, $m>n$ або $m=n$, то дріб – *неправильний*.

Будь-який неправильний раціональний дріб $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ можна представити у вигляді суми цілої частини і правильного дробу $P_m(x)/Q_n(x)=G_{m-n}(x)+R_k(x)/Q_n(x)$, причому цей розклад єдиний.

Тут $G_{m-n}(x)$ – многочлен, який називають *цілою частиною* раціонального дробу, а $R_k(x)/Q_n(x)$ – правильний дріб, тобто $k<n$. Многочлени $G_{m-n}(x)$ і $R_k(x)$ – відповідно частка й остача від ділення «кутом» $P_m(x)$ на $Q_n(x)$.

Приклад 5. Виділити цілу частину неправильного дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^4-3x^2+5x+4}{(x+4)(x-2)}$ і подати його у вигляді суми цілої частини та правильного дробу.

Розв'язання. Для виділення цілої частини застосуємо ділення «кутом» многочлена на многочлен, але спочатку розкриємо дужки у знаменнику, виконавши множення, та представимо результат у стандартному вигляді в порядку спадання степенів: $Q(x)=(x+4)(x-2)=x^2+2x-8$;

$$
\begin{array}{r|l}
-\; x^4-3x^2+5x+4 & \underline{x^2+2x-8} \\
\underline{x^4+2x^3-8x^2} \quad & x^2-2x+9 \\
-\; -2x^3+5x^2+5x+4 & \\
\underline{-2x^3-4x^2+16x} \quad & \\
-\; 9x^2-11x+4 & \\
\underline{9x^2+18x-72} & \\
-29x+76 &
\end{array}
$$

Таким чином,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=x^2-2x+9+\frac{-29x+76}{(x+4)(x-2)}.$$

Зауваження 3. Виділення цілої частини неправильного раціонального дробу інколи можна зробити простіше, виконавши алгебраїчні перетворення чисельника.

Приклад 6. Виділити цілу частину неправильного дробу $\frac{x^4}{x^2+1}$ і подати його у вигляді суми цілої частини (многочлена) та правильного дробу.

Розв'язання. Скористаємося алгебраїчними перетвореннями:

$$\frac{x^4}{x^2+1}=\frac{x^4-1+1}{x^2+1}=\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}=x^2-1+\frac{1}{x^2+1}.$$

Інтегрування многочленів процес не дуже складний, найбільші труднощі зустрічаються під час інтегрування правильних раціональних дробів. Для інтегрування правильних раціональних дробів використовують метод розкладання на найпростіші дробі, згідно твердження, що будь-який правильний раціональний дріб можна представити у вигляді суми найпростіших дробів.

Означення 4. Правильні раціональні дробі виду:

$$\frac{A}{x-a};\ \frac{A}{(x-a)^n};\ \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c};\ \frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

називають *елементарними (найпростішими) дробами* відповідно I, II, III, IV типу.

Як відомо, будь-який многочлен можна записати у вигляду добутку лінійних та квадратичних множників з дійсними коефіцієнтами, тобто

$$Q(x)=(x-a)^k\cdot\ldots\cdot(x^2+px+q)^t\cdot\ldots.$$

Кожному множнику $(x-a)^k$ у розкладанні знаменника $Q(x)$ відповідає в розкладання дробі $\frac{P(x)}{Q(x)}$ k доданкам суми найпростіших дробів виду II

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\frac{A_{k-2}}{(x-a)^{k-2}}+\ldots+\frac{A_1}{(x-a)};$$

а кожному множнику $(x^2+px+q)^t$ відповідає сума t найпростіших дробів IV

$$\frac{A_t x+B_t}{(x^2+px+q)^t}+\frac{A_{t-1}x+B_{t-1}}{(x^2+px+q)^{t-1}}+\ldots+\frac{A_1 x+B_1}{(x^2+px+q)}.$$

Постійні $A_k, A_{k-1},\ldots,A_1$ та $A_t, A_{t-1},\ldots,A_1$ знаходять методом невизначених коефіцієнтів або методом визначених значень (частинних значень).

У випадку коли множники у розкладанні знаменника мають кратність 1 (тобто, $k=1,\ t=1$), то сума най простіших дробів буде складатися з найпростіших дробів I й II, наприклад:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{5x+4}{(x+4)(x-2)(x^2+1)}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Таким чином, інтегрування правильних раціональних дробів полягає в тому, що, виконавши розкладання на множники знаменника дробу та розклавши на найпростіші дробі, заданий інтеграл заміняємо сумою інтегралів від найпростіших дробів.

Приклад 7. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int\frac{4x^2+5x+8}{(x+2)^2(x-1)}dx$; б) $\int\frac{5x+4}{(x+4)(x-2)(x^2+1)}dx$.

Розв'язання. а) $\int\frac{4x^2+5x+8}{(x+2)^2(x-1)}dx=$

$$=\int\left(\frac{A}{(x+2)^2}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{C}{x-1}\right)dx=\int\frac{A(x-1)+B(x+2)(x-1)+C(x+2)^2}{(x-1)(x+2)^2}dx=$$

Для знаходження постійних скористаємось методом визначених значень. Для цього знайдемо корені знаменника. Оскільки число 2 кратний корінь, то третє значення змінної x виберемо довільним чином

$$=\left|\begin{array}{c} A(x-1)+B(x+2)(x-1)+C(x+2)^2=4x^2+5x+8 \\ (x-1)(x+2)^2=0,\ \ x=1,\ \ x=-2,\ \ x=-1, \\ x=1,\ 9C=17,\ \ C=\dfrac{17}{9} \\ x=-2,\ -3A=14,\ \ A=\dfrac{-14}{3} \\ x=-1,\ -2A-2B+C=9,\ -2B=\dfrac{-20}{9}, B=\dfrac{10}{9} \end{array}\right|=$$

$$=\int\left(\frac{-14/3}{(x+2)^2}+\frac{10/9}{(x+2)}+\frac{17/9}{x-1}\right)dx=\frac{14}{9(x+2)}+\frac{10}{9}\ln|x+2|+\frac{17}{9}\ln|x-1|+C;$$

б) $$\int\frac{5x+4}{(x+4)(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{A}{x+4}+\frac{Bx+D}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\int\frac{A(x^2+1)+(Bx+D)(x+4)}{(x+4)(x^2+1)}dx=$$

якщо розкрити дужки у чисельнику, то отримаємо

$$=\int\frac{Ax^2+A+Bx^2+Dx+4Bx+4D}{(x+4)(x^2+1)}dx=$$

скористаємось методом невизначених коефіцієнтів, для цього прирівняємо коефіцієнти при відповідних степенях змінної чисельника заданої дробі до коефіцієнтів дробі, яку ми отримали

$$\begin{array}{c|c} x^2 & A+B=0, B=-4, \\ x^1 & D+4B=5, D=21, \\ x^0 & A=4, \end{array}$$

знаходимо інтеграл

$$\int\left(\frac{4}{x+4}+\frac{-4x+21}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{4}{x+4}dx-\int\frac{4xdx}{x^2+1}+\int\frac{21dx}{x^2+1}=4\ln|x+4|+$$

$$-2\int\frac{2xdx}{x^2+1}+21\cdot arctgx+C_1=4\ln|x+4|-2\ln\left|x^2+1\right|+21\cdot arctgx+C.$$

Більше прикладів можна знайти у [5;10] зі списку літератури.

5 Інтегрування тригонометричних функцій та деяких видів ірраціональностей

Нехай дано вираз раціональний від тригонометричних функцій. Оскільки усі тригонометричні функції можна представили через $\sin x$ та $\cos x$, то отримаємо вираз $R(\sin x, \cos x)$.

Розглянемо інтеграл виду $\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x+d}$, який завдяки підстановці $u=tg\frac{x}{2}$ (називають: універсальна тригонометрична підстановка) перетворюється у інтеграл від раціонального дробу. Згідно тригонометричним формулам [10]:

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2tg\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\ \sin x=\frac{2u}{1+u^2};$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}\left(1-tg^2\frac{x}{2}\right)=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\ \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Повертаючись до підстановки $u = tg\frac{x}{2}$, отримаємо $x = 2arctgu$, знайдемо диференціал $dx = \frac{2du}{1+u^2}$.

Універсальну тригонометричну підстановку краще застосовувати лише у випадку, коли функції $\sin x$ та $\cos x$ мають непарні степені. Якщо степені цих функцій парні, то зручніше використовувати підстановку $u = tgx$, тоді $dx = \frac{du}{1+u^2}$, $\sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1}{1+u^2}$. А також для інтегралів виду $\int R(tgx)dx$.

Приклад 8. Знайти інтеграли:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{3+5\cos x}\text{; б) } \int \frac{dx}{\sin^2 x - 3\cos^2 x}.$$

Розв'язання. а) $\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \left| \begin{matrix} u = tg\frac{x}{2}, dx = \frac{2du}{1+u^2} \\ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \end{matrix} \right| =$

$$= \int \frac{2du}{(1+u^2)\left(3+5\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} = \int \frac{2du}{8-2u^2} = \int \frac{2du}{8-2u^2} = \int \frac{du}{4-u^2} = -\int \frac{du}{u^2-4} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}}\right| + C\text{; б) } \int \frac{dx}{\sin^2 x - 3\cos^2 x} =$$

$$=\left|\begin{matrix} u=tgx,\ dx=\dfrac{du}{1+u^2} \\ \sin^2 x=\dfrac{u^2}{1+u^2},\ \cos^2 x=\dfrac{1}{1+u^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{du}{u^2-3}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{tgx-\sqrt{3}}{tgx-\sqrt{3}}+C.$$

Знаходження інтегралу виду $\int\sin^m x\cdot\cos^n xdx$, де $m,n\in Z$ залежить від показників степеня, а отже:

1) якщо $m,n>0$ та або m або n непарне, то використовують підстановку $u=\sin x$ $(u=\cos x)$

Приклад 9. Знайти $\int\sin^3 x\cos^2 xdx$.

Розв'язання. $\int\sin^3 x\cos^2 xdx=\int\sin^2 x\cos^2 x\sin xdx=$

$$=\left|\begin{matrix} u=\cos x, du=-\sin xdx \\ -du=\sin xdx, \sin^2 x=1-\cos^2 x=1-u^2\end{matrix}\right|=-\int(1-u^2)u^2du=$$

$$-\int u^2du+\int u^4du=\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}+C=\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C.$$

2) якщо $m,n>0$ та m, n – парні, то застосовують формули пониження порядку, як то:

$$\frac{1}{2}(1+\cos 2x)=\cos^2 x,\quad \frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\sin^2 x.$$

Приклад 10. Знайти $\int\cos^4 2xdx$.

Розв'язання. $\int\cos^4 2xdx=\int\cos^2 2x\cdot\cos^2 2xdx=$

$$\int\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 4x+\cos^2 4x)dx=\frac{1}{4}\int dx+$$

$$+\frac{1}{4}\int\cos 4xdx+\frac{1}{4}\int\cos^2 4xdx=\frac{x}{4}+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{1}{8}\int(1+\cos 8x)dx=\frac{x}{4}+$$

$$+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{x}{8}+\frac{\sin 8x}{64}+C.$$

3) якщо $m,n<0$ та їх сума парне число, то застосовують підстановку $u=tgx\ (u=ctgx)$, яка дозволяє привести інтеграл до суми інтегралів від степеневих функцій

Приклад 11. Знайти $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$.

Розв'язання. $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}=\left|\begin{array}{c} u=tgx,\ dx=\frac{du}{1+u^2} \\ \sin^2 x=\frac{u^2}{1+u^2},\ \cos^2 x=\frac{1}{1+u^2}\end{array}\right|=$

$$=\int\frac{\left(1+u^2\right)^{3/2}\left(1+u^2\right)^{1/2}du}{\left(1+u^2\right)u^3}=\int\frac{1+u^2}{u^3}du=\int\frac{du}{u^3}+\int\frac{du}{u}=\frac{-1}{2u^2}+\ln u+C=$$

$$=\frac{-1}{2tg^2x}+\ln|tgx|+C.$$

4) у випадку, коли один з показників степені дорівнює нуля, а інший від'ємний, то застосовують універсальну тригонометричну підстановку.

Звернемо увагу також на інтегрування деяких виразів, що містять ірраціональність. Але розглядатимемо лише випадки, коли підкореневий вираз лінійний, тобто має вигляд $ax+b$, де $a,b=const$.

Нехай ми маємо знайти інтеграл такого вигляду, як $\int R(x,\sqrt[k_1]{ax+b},\sqrt[k_2]{ax+b},\sqrt[k_3]{ax+b})dx$, тоді слід скористатися підстановкою $ax+b=t^n$, де $n=НСК\left(k_1,k_2,k_3\right)$, звідси $x=\frac{1}{a}\left(t^n-b\right)$,

$dx = \frac{n}{a} t^{n-1} dt$.

Приклад 12. Знайти $\int \frac{\sqrt{x-1}dx}{\sqrt[3]{x-1}+2}$.

Розв'язання. $\int \frac{\sqrt{x-1}dx}{\sqrt[3]{x-1}+2} = \left| \begin{matrix} x-1=t^6 \\ x=t^6+1, dt=6t^5dt \end{matrix} \right| = 6\int \frac{t^8}{t^2+2}dt$

Оскільки підінтегральною функцією є неправильний дріб, то потрібно виділити цілу частину (зробити самостійно), а потім окремо проінтегрувати правильні дробі. У результаті отримаємо таку відповідь

$$\frac{\sqrt[6]{(x-1)^7}}{7} - \frac{2\sqrt[6]{(x-1)^5}}{5} + \frac{4\sqrt{x-1}}{3} - 8\sqrt[6]{x-1} + \frac{16}{\sqrt{2}} arctg \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt{2}} + C.$$

З інтегруванням інших видів ірраціональностей можна ознайомитися у [1; 6; 7; 8;10; 11] зі списку літератури.

ЛЕКЦІЯ 7-8

План лекції

1. Означення визначеного інтегралу та його властивості.
2. Обчислення визначеного інтегралу. Теорема Ньютона – Лейбніца. Основні методи інтегрування визначеного інтегралу.
3. Геометричні застосування визначеного інтегралу: обчислення площі плоскої фігури, довжини дуги кривої, об’єму тіла обертання.
4. Економічне застосування визначеного інтегралу. Основи побудови моделей управління запасами, поставками тощо.

1 Означення визначеного інтегралу та його властивості

До поняття визначеного інтегралу приводять такі задачі геометрії фізики, економіки і т.п., як: обчислення площі фігури, обчислення роботи змінної сили, знаходження шляху за відомою швидкістю та інші.

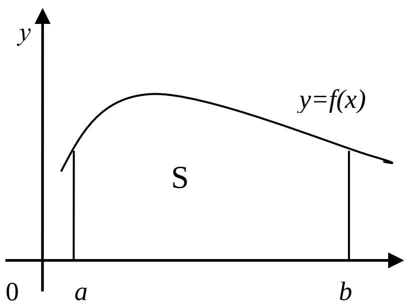


Рисунок 1

Нехай на відрізку $[a,b]$ задано функцію $y = f(x)$, яка є додатною, $f(x) > 0$. Знайдемо площу S криволінійної трапеції (рисунок 1) основа якої належить осі, праворуч та ліворуч відповідно обмежена прямими та зверху – кривою $y = f(x)$. Як відомо, площа фігури дорівнює сумі площин декількох фігур з яких вона складається, тож будь-який багатокутник можна розбити на трикутники. Потім за допомогою граничного переходу за площами правильних вписаних та описаних багатокутників можна визначити площу, але при цьому слід враховувати геометричні властивості фігури.

Обчислимо площу зазначеної фігури (рисунок 1). Для цього відрізок $[a;b]$ розіб'ємо точками $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b$. У кожній точці ділення проведемо перпендикуляр до точки перетину з графіком функції $y = f(x)$ (рисунок 2, а). Таким чином, трапецію розіб'ємо на n частинних трапецій. На кожному відрізку $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$,..., $[x_{n-1}, x_n]$ виберемо точку ξ_i та проведемо прямі паралельні до осі $0y$ до перетину з $y = f(x)$ й отримаємо $f(\xi_i)$ (рисунок 2, б).

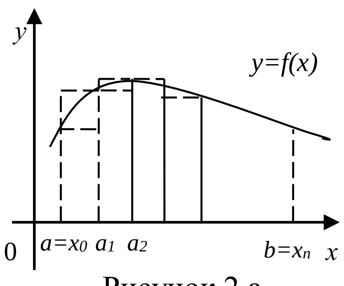


Рисунок 2,а

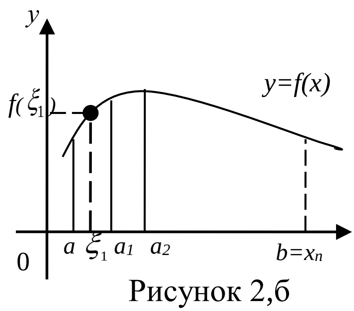


Рисунок 2,б

Суму що має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

будемо називати *інтегральною сумою* для функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Ця сума залежить як від способу розбиття так й від вибору точок ξ_i. Вираз $f(\xi_i)\Delta x_i$ є площею прямокутника, а їх сума – площа криволінійної трапеції. Площа сходинкової фігури буде вважатися наближеним значенням площі заданої криволінійної трапеції, яке буде тим більш точнішим, якщо буде збільшено кількість точок розбиття (n) та чим меншим буде довжина частинного інтервалу (Δx_i).

Означення. Якщо границя інтегральної суми при $\max \Delta x_i$, що прямую до нуля, існує, кінцева та не залежить від способу вибору точок Δx_i та точок ξ_i, то цю границю називають визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ та позначають $\int_a^b f(x)dx$. Сама функція $f(x)$ називається інтегрованою на відрізку $[a;b]$, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

$a;b$ – нижня та верхня границі інтегрування відповідно.

Теорема 1. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Властивості визначеного інтегралу.

1. Постійний множник можна винести за знак визначеного інтегралу:

$$\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot\int_a^b f(x)dx,\ c = const.$$

2. Визначений інтеграл від суми (або різниці) функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від кожного доданку:

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\ c\in[a,b]$

4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

5. $\int_a^a f(x)dx = 0$

6. На відрізку $[a;b]$, $a<b$, $f(x)\le g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

7. Теорема про середнє.

Теорема 2 (*про оцінку визначеного інтегралу*). Значення визначеного інтегралу міститься між добутком найменшого та найбільшого значення підінтегральної функції на довжину інтегралу інтегрування:

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a),$$

де m, M – найменше та найбільше значення функції $f(x)$

$$m \le f(x) \le M .$$

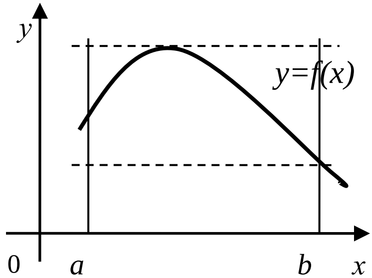


Рисунок 3

Геометричний зміст (рисунок 3)*:* площа криволінійної трапеції більша площі прямокутника з основою що дорівнює основі цієї трапеції і висотою, що дорівнює найменшої ординаті трапеції, та менша за площу прямокутника з такою ж основою і висотою, що дорівнює найбільшій ординаті.

Приклад 1. Оцінити визначений інтеграл $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}$.

Розв'язання: Функція $\sin x$ на відрізку $\left[\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$ приймає значення відповідно значення $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$, тож функція $\frac{\sin x}{x}$ прийматиме значення $\frac{\sin \pi/4}{\pi/4}$ та $\frac{\sin \pi/2}{\pi/2}$ і буде спадаючою

$$\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\sin \pi/2}{\pi/2} < \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sin x}{x} < \frac{\sin \pi/4}{\pi/4}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\frac{1}{2} < \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sin x}{x} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тож як бачимо значення заданого визначеного інтегралу знаходиться між числами $0{,}5$ та $0{,}7$.

8. Похідна від визначеного інтегралу

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot dx\right)' = f(x)\,.$$

2 Обчислення визначеного інтегралу. Формула Ньютона – Лейбніца. Основні методи інтегрування визначеного інтегралу.

Для обчислення визначених інтегралів користуються формулою Ньютона – Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)\,,\; F'(x)=f(x)\,.$$

Приклад 2. Обчислити визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_1^2 3^{4-3x}dx\,;\ \text{б) } \int_0^2\left(\sqrt[3]{x}+\frac{4}{x+2}\right)dx\,.$$

Розв’язання:

$$\text{а) } \int_1^2 3^{4-3x}dx = -\frac{1}{3}\cdot\frac{3^{4-3x}}{\ln 3}\Bigg|_1^2 = -\frac{1}{3\ln 3}\left(3^{-2}-3\right) = \frac{26}{27\ln 3}\,;$$

$$\text{б) } \int_0^2\left(\sqrt[3]{x}+\frac{4}{x+2}\right)dx = \int_0^2 x^{1/3}dx + 4\int_0^2\frac{dx}{x+2} = \frac{3x^{4/3}}{4}\Bigg|_0^2 +$$

$$+4\cdot\ln|x+2|\Big|_0^2 == \frac{3\cdot 2^{4/3}}{4} - 0 + 4\cdot\ln 4 - 4\cdot\ln 2 = \frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{2}+4\ln 2.$$

Розглянемо метод заміни змінної у визначеному інтегралі.

Зауваження 1. Під час введення нової змінної у визначеному інтегралі слід вказати нові границі інтегрування, тому повертатися до первинної змінної не має сенсу.

Приклад 3. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^6}$.

Розв'язання: $\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^6} = \int_0^1 \frac{x^2dx}{1+\left(x^3\right)^2} = \left| \begin{array}{c} t = x^3 \\ dt = 3x^2dx \\ t_a = 1 \\ t_b = 0 \end{array} \right| =$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3} arctgt\Big|_0^1 = \frac{1}{3} arctg1 - \frac{1}{3} arctg0 = \frac{\pi}{12}.$$

Також використовується й метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi/2} e^{4x}\cos 5x\,dx$.

Розв'язання:

$$\int_0^{\pi/2} e^{4x}\cos 5x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = \cos 5x, \\ dv = e^{4x}dx, \\ du = -5\sin 5x\,dx, \\ v = \frac{1}{4}e^{4x}. \end{array} \right| = \frac{1}{4}e^{4x}\cos 5x\Big|_0^{\pi/2} -$$

$$+\frac{5}{4}\int_0^{\pi/2} e^{4x}\sin 5x dx = \left| \begin{array}{c} u = \sin 5x, \\ dv = e^{4x}dx, \\ du = 5\cos 5x\,dx, \\ v = \frac{1}{4}e^{4x}. \end{array} \right| = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}\left(\frac{1}{4}e^{4x}\sin 5x\Big|_0^{\pi/2} -\right.$$

$$\left. -5\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}e^{4x}\cos 5x dx\right) = -\frac{1}{4} + \frac{5e^{2\pi}}{16} - \frac{25}{16}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}e^{4x}\cos 5x dx.$$

Як бачимо це зворотній інтеграл, тож після перетворень про які йшла мова в лекції 5, отримаємо відповідь:

$$\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{4} e^{4x} \cos 5x dx = \frac{5e^{2\pi} - 4}{41}.$$

3 Геометричні застосування визначеного інтегралу

Як відомо, визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ це число, яке дорівнює площі криволінійної трапеція, яка зверху обмежена кривою $y = f(x)$, знизу віссю абсцис, праворуч та ліворуч прямими $x = a$, $x = b$ (рисунок 1). Тому першим геометричним застосуванням ми розглядатимемо саме обчислення площі фігури.

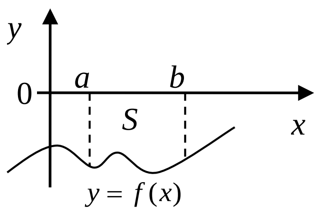


Рисунок 4

Якщо фігура (рисунок 4) площу якої потрібно знайти обмежена лініями $y = f(x)$ $\left(f(x) < 0\right)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, тобто буде розташована під віссю абсцис, то площу такої фігури слід знаходити за формулою

$$S = -\int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

Приклад 5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{e^x - 1}$, $y = 0$, $x = \ln 2$.

Розв'язання. Для знаходження площі цієї фігури застосуємо формулу $S = \int_a^b f(x)dx$. Як відомо з умови задачі $0 \le x \le \ln 2$, $f(x) > 0$, маємо

$$S=\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx=\left|\begin{array}{c}\sqrt{e^x-1}=t, e^x-1=t^2\\ e^x=t^2+1, \ln e^x=\ln\left(t^2+1\right)\\ x=\ln\left(t^2+1\right), dx=\dfrac{2tdt}{t^2+1}\\ t_a=0, t_b=1\end{array}\right|=2\int_0^1\frac{t^2}{t^2+1}dt=$$

$$=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2\left(t-arctgt\right)\Big|_0^1=2-\frac{\pi}{2}.$$

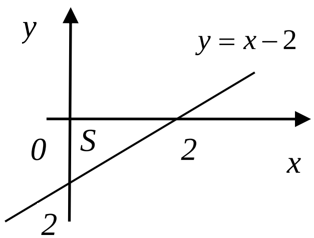


Рисунок 5

Приклад 6. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=x-2$, $x=0$, $x=2$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру (рисунок 5).

Знаходимо площу за формулою (1):

$$S=-\int_0^2(x-2)dx=-\frac{\left(x-2\right)^2}{2}\Bigg|_0^2=$$

$$=-\frac{\left(2-2\right)^2}{2}+\frac{\left(0-2\right)^2}{2}=\frac{1}{2}(кв.од).$$

Якщо фігура обмежена лініями $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$ ($f_1(x)\le f_2(x)$) (рисунок 6), то площу фігури знаходять за формулою:

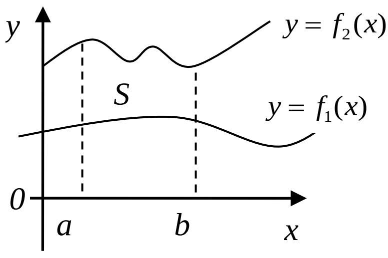


Рисунок 6

$$S=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx\,. \qquad (2)$$

Приклад 7. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=4-x^2$, $y=3x$.

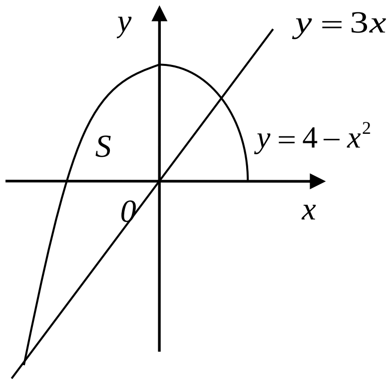


Рисунок 7

Розв'язання. Побудуємо фігуру (рисунок 7) та знайдемо границі інтегрування. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y=4-x^2, \\ y=3x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+3x-4=0, \\ y=3x; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=-4, x_2=1, \\ y=3x; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=-4, x_2=1, \\ y_1=-12, y_2=3. \end{cases}$$

Знаходимо площу фігури за формулою (2):

$$S=\int_{-4}^{1}\left[4-x^2-3x\right]dx=\left(4x-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_{-4}^{1}=4-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}-$$

$$-\left(-16+\frac{64}{3}-16\right)=\frac{77}{6}(кв.од).$$

Якщо на відрізку $[a;b]$ функція $y=f(x)$, що зверху обмежує криволінійну трапецію, є кусочно-монотонною (рисунок 8), при цьому $c\in[a;b]$, то площу шуканої фігури слід знаходити, як

$$S=S_1+S_2=\int_a^c f_1(x)dx+\int_c^b f_2(x)dx\,. \qquad (3)$$

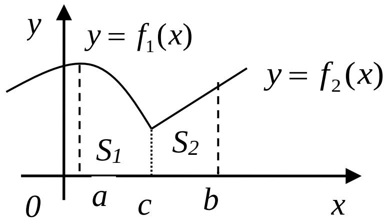


Рисунок 8

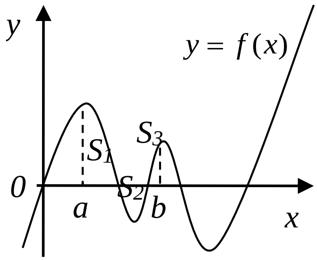


Рисунок 9

Нехай на відрізку $[a;b]$ задана неперервна функція $y=f(x)$ загального виду (рисунок 9). Припустимо, що відрізок $[a;b]$ можна розбити на кінцеве число інтервалів, таких що на кожному з них функція $y=f(x)$ буде знакосталою й не дорівнюватиме нулю, тоді площу фігури знаходимо так

$$S=S_1+S_2+S_3=\int_a^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx. \qquad (4)$$

Приклад 8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=4/x$, $y=x$, $x=4$, $x=0$.

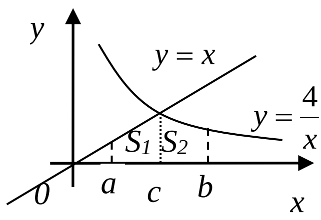


Рисунок 10

Розв'язання. Побудуємо фігуру (рисунок 10).

Як бачимо $y=f(x)$, яка обмежує задану фігуру, є кусочно-монотонною, тому для знаходження площі фігури скористаємось формулою (3). Знайдемо координати точки перетину графіків функцій, прирівняємо їх:

$$y = 4/x,\ y = x,\ x = 4/x,\ x - 4/x = 0,\ x^2 - 4 = 0,\ x = \pm 2.$$

Таким чином, $a = 0$, $b = 4$, $c = 2$. Значення $x = -2$ не задовольняє умові задачі. Отже, площа заданої фігури обчислюється так:

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^2 x dx + \int_2^4 \frac{4}{x} dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 + 4\ln x\Big|_2^4 = 2 + 4\ln 2(\textit{кв.од}).$$

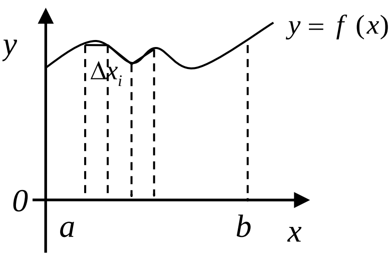


Рисунок 11

Нехай $y = f(x)$ неперервна функція разом зі своїми похідними $f'(x)$. Такі лінії будемо називати гладкими.

Довжиною дуги кривої називатимемо границю, до якої прямує довжина вписаної в неї ламаної під час необмеженого зростання числа її ланцюжків, за умови прямування довжини найбільшого з них до нуля.

Якщо ми будемо розраховувати довжину кожного з цих ланцюжків й додавати їх, ми прийдемо до визначеного інтегралу. Тож, визначений інтеграл застосовують для обчислення довжини дуги кривої.

Тоді, якщо задана функція $y = f(x)$, $x \in [a;b]$, то довжина дуги обчислюється за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx; \qquad (5)$$

якщо задана функція $y=\phi(t)$, $x=\varphi(t)$ $t\in[\alpha;\beta]$, то довжина дуги обчислюється за формулою

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt\,; \qquad (6)$$

якщо задана функція $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[\varphi_1;\varphi_2]$, то довжина дуги обчислюється за формулою:

$$l=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi\,. \qquad (7)$$

Обчислення довжини дуги називають спрямленням.

Приклад 9. Обчислити довжину однієї арки циклоїди, якщо вона задана параметричними рівняннями: $y=2(1-\cos t)$, $x=2(t-\sin t)$.

Розв'язання. Оскільки задана функція є параметричною, то для обчислення довжини арки циклоїди скористаємось формулою (6). Перш за все знайдемо похідні y'_t та x'_t:

$$y'_t=2\sin t\,,\ x'_t=2(1-\cos t)\,,\ x'^2+y'^2=8-8\cos t=16\sin^2 t/2\,.$$

Точка, що рухається, описує одну арку циклоїди, коли параметр t змінюється від нуля до 2π [10]. Знайдемо довжину цієї арки:

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{16\sin^2 t/2}\,dt=4\int_{0}^{2\pi}\sin t/2\,dt=-8\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=-8\cos\frac{2\pi}{2}+8\cos 0=16(\text{од.довжини})\,.$$

Нехай на відрізку $[a;b]$ задана неперервна знакопостійна функція $y=f(x)$. Знайдемо об'єм тіла, отриманого обертанням фігури навколо осі абсцис (рисунок 12).

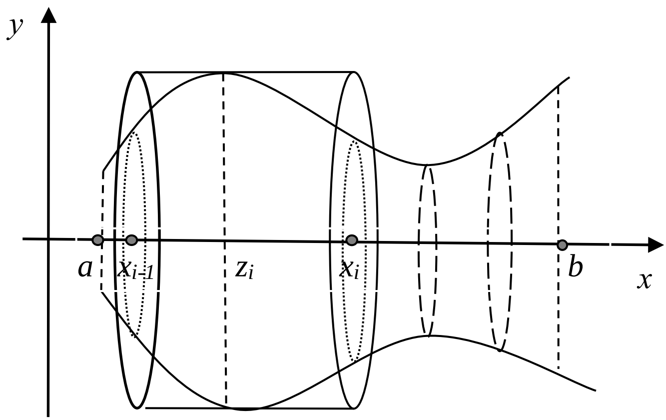


Рисунок 12

Для знаходження об'єму скористаємось методом проектування криволінійної трапеції на вісь абсцис. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на елементарні відрізки точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, та на кожному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ довільним чином виберемо z_i $i = 1,2,\ldots n$. Тоді деяке наближення для шуканого об'єму дасть сума

$$\sum_{i=1}^{n} \pi f^2(z_i)\Delta x_i$$

– це об'єм циліндра з висотою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ та радіусом основи $f(z_i)$.

Очевидно, що наближення до шуканого об'єму V_x буде тим ближчим, чим менша довжина відрізка розбиття Δx_i, тому шуканий об'єм V_x знайдемо як границю

$$V_x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(z_i)\Delta x_i ,$$

де $\max \Delta x_i$ – максимальна довжина відрізка розбиття. А це і є визначений інтеграл, тобто

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx .$$

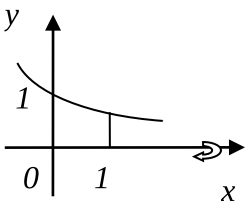


Рисунок 13

Приклад 10. Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням фігури, обмеженої лініями

$$y = e^{-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1 .$$

Розв'язання. Побудуємо фігуру, обмежену зазначеними лініями (рисунок 13). Обчислимо об'єм

$$V_x = \pi \int_0^1 e^{-2x} dx = \frac{-\pi}{2} e^{-2x}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right).$$

Формально замінивши змінну x на y, ми отримаємо формулу для обчислення об'єму тіла обертання навколо осі ординат

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy \text{ або } V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)dx .$$

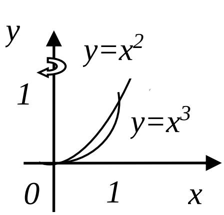


Рисунок 14

Приклад 11. Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = x^3$.

Розв'язання. Об'єм тіла, яке отримано обертанням фігури знаходимо як різницю між зовнішнім об'ємом $V_{зовн}$, який опише лінія

$y = x^3$ та об'ємом внутрішнім $V_{вн}$, який опише $y = x^2$.

$$V_y = \pi\int_0^1\left[\left(y^{1/3}\right)^2 - \left(y^{1/2}\right)^2\right]dy = \pi\left(\frac{3x^{5/3}}{5} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{10}.$$

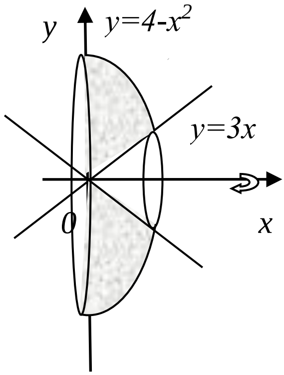


Рисунок 15

Приклад 13. Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням фігури, обмеженої лініями

$y = 4 - x^2$, $y = 3x$, $x = 0$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру обмеженої лініями $y = 4 - x^2$, $y = 3x$, $x = 0$ (рисунок 15). Як бачимо, об'єм шуканого тіла треба знаходити як різницю між більшим (об'єм зовнішнього тіла) та меншим (об'ємом внутрішнього тіла) об'ємами. Але спочатку знайдемо точки перетину графіків заданих функцій, які виконуватимуть роль границь інтегрування. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 3x; \end{cases} \begin{cases} x^2 + 3x - 4 = 0, \\ y = 3x; \end{cases} \begin{cases} y_1 = 3, y_2 = -12, \\ x_1 = 1, x_2 = -4. \end{cases}$$

Друга точка з координатами $(-4;-12)$ не задовольняє умові задачі, оскільки тіло обмежено віссю ординат. Отже, $a = 0$, $b = 1$ – границі інтегрування. Знайдемо поступово $V_{зовн}$ та $V_{вн}$:

$$V_{зовн} = \pi\int_0^1\left(4 - x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^1\left(16 - 2x^2 + x^4\right)dx = \pi\left(16x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{203\pi}{15}(куб.од)\,; \quad V_{вн} = \pi\int_0^1 9x^2dx = 3\pi x^3\Big|_0^1 = 3\pi(куб.од)\,.$$

Остаточно

$$V_x = \frac{203\pi}{15} - 3\pi = \frac{158\pi}{15}(куб.од)\,.$$

4 Економічне застосування визначеного інтегралу. Основи побудови моделі управління запасами, поставками тощо

Економічний зміст визначеного інтегралу полягає в тому, що він виражає об'єм виготовленої продукції за певний період часу, якщо відома функція продуктивності праці.

Приклад 14. Визначити запас товару в магазині (на складі), який утворився за три дні, якщо надходження товару характеризується функцією $f(t) = 3t^2 - 2$.

Розв'язання. Маємо

$$\int_0^3 \left(3t^2 - 2\right)dt = \left(t^3 - 2t\right)\Big|_0^3 = 27 - 6 = 21.$$

Приклад 15. Знайти об'єм продукції виготовленої за 4 роки, якщо функція Кобба – Дугласа (додаток Ж) має вигляд $g(t) = e^{3t}(1+t)$.

Розв'язання. Обчислимо визначений інтеграл

$$Q(t) = \int_0^4 e^{3t}(1+t)dt = \left| \begin{array}{l} u = 1+t, du = dt \\ dv = e^{3t}dt, v = \frac{1}{3}e^{3t} \end{array} \right| = \frac{1}{3}e^{3t}\left(1+t\right)\Big|_0^4 -$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^4 e^{3t}dt = 2{,}53\cdot 10^5\,(умов.одиниць).$$

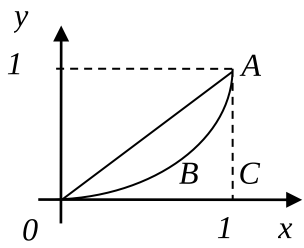


Рисунок 16

Розглянемо криву Лоренца $y = f(x)$ – залежність відсотку доходів від відсотку населення, яке має ці доходи (крива OBA, рисунок 16). Завдяки цій кривій ми можемо оцінити нерівність розподілу доходів населення. Якщо $x = 0{,}3$ при $y = 0{,}5$, то це означає, що 30% населення володіють 50% загального доходу країни. Під час рівномірного розподілу доходів крива Лоренца перероджується в пряму – бісектрису OA, тому площа фігури OBA розташована між бісектрисою OA та кривою Лоренца віднесена до площі трикутника OAC (коефіцієнт Джині)

$$k = \frac{S_{0AB}}{S_{\Delta 0AC}} = 2\int_0^1 [x - f(x)]dx$$

характеризує степінь нерівності в розподілі доходів населення. Очевидно, що $0 \le k \le 1$. Значення $k = 0$ відповідає досконалому розподілу доходів. Достатньо високе значення k вказує на суттєво нерівномірний розподіл доходів населення країни.

Приклад 16. За даними дослідження розподілу доходів в одній з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, де x – частка населення, y – частка доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джині.

Розв'язання. Коефіцієнт Джині розрахуємо так:

$$k=\frac{S_{0AB}}{S_{\Delta 0AC}}=1-\frac{S_{0BAC}}{S_{\Delta 0AC}}=1-2S_{0BAC},$$

$$S_{\Delta 0AC}=\frac{1}{2}S_{0BAC}=\int_0^1\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)dx=\int_0^1 dx-\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=$$

$$=1-\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Тому коефіцієнт Джині дорівнюватиме

$$k=1-2\left(1-\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx\right)=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx-1.$$

Розв'яжемо визначений інтеграл методом інтегрування частинами та отримаємо

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4},$$

таким чином, коефіцієнт Джині: $k=2\cdot\frac{\pi}{4}-1=\frac{\pi}{2}-1\approx 0{,}57$.

Розглянемо задачу про знаходження точки ринкової рівноваги, тобто точки, в якій ціна товару така, що кількість товару, яку покупці хочуть придбати, точно збігається з кількістю товару, яку продавці хочуть запропонувати. Фактично, ми будемо знаходити точку, в якій перетинатимуться дві криві попиту та пропозиції (додаток Г).

Нехай крива $q=f(x)$ функція попиту на деякий товар, якій відповідає крива Q на рисунку 17, $s=g(x)$ функція пропозиції, крива S на рисунку 17, де x – величина попиту (пропозиції), p – ціна товару. Точка перетину цих кривих (x_0,p_0) і є точка ринкової рівноваги (рисунок 17).

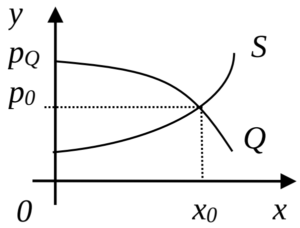


Рисунок 17

Прибуток від реалізації товару x_0 за рівноважною ціною p_0 складатиме $x_0 \cdot p_0$. Якщо ціна буде неперервно зменшуватися від максимальної $p_Q = f(0)$ до рівноважної p_0 (якщо задовольняється попит на товар), то прибуток дорівнюватиме величині $\int_0^{x_0} f(x)dx$.

При цьому величина коштів

$$C = \int_0^{x_0} f(x)dx - x_0 p_0$$

яка зберігається користувачем, якщо товар продається за рівноважною ціною p_0, називається *виграшем користувачів*.

А величина

$$P = x_0 p_0 - \int_0^{x_0} f(x)dx$$

називають *виграшем постачальників*.

Приклад 17. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідний вигляд

$$y = 6 - x^2, \; y = 5x - 8.$$

Розв'язання. Знайдемо точку (x_0, p_0) ринкової рівноваги. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 6 - x^2, \\ y = 5x - 8; \end{cases} \begin{cases} 6 - x^2 = 5x - 8, \\ y = 5x - 8; \end{cases} \begin{cases} x^2 + 5x - 14 = 0, \\ y = 5x - 8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -7, x_2 = 2, \\ y = 5x - 8; \end{cases} \begin{cases} x_1 = -7, x_2 = 2, \\ y_1 = -43, y_1 = 2. \end{cases}$$

Точка з координатами $(-7,-43)$ не задовольняє умові задачі. Тож, точкою ринкової рівноваги буде лише точка з координатами $(2,2)$.

Знайдемо виграші користувачів та постачальників, використовуючи формули зазначені раніше.

Для користувачів:

$$C = \int_0^{x_0} f(x)dx - x_0 p_0 = \int_0^2 (6 - x^2)dx - 2 \cdot 2 = \left(6x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^2 - 4 =$$

$$= 12 - \frac{8}{3} - 4 = 5{,}33(\textit{грош.од.})$$

Для постачальників:

$$P = x_0 p_0 - \int_0^{x_0} f(x)dx = 4 - \int_0^2 (5x - 8)dx = 4 - \left(\frac{5x^2}{2} - 8x \right) \Bigg|_0^2 =$$

$$= 4 - 10 + 16 = 8(\textit{грош.од.})$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа : для втузов. / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – [11-е изд., стер.] – СПб. : Лань, 2005. – 736 с.
2. Васильченко І. П. Вища математика для економістів : Підручник / І. П. Васильченко. – [2-ге вид., випр.] – Київ : Знання, 2004. – 454 с.
3. Вища математика : Підручник / [В. А. Домбровський та ін.] ; за ред. М. І. Шинкарика. – Тернопіль : Видавництво Карп'юка, 2003 – 480 с.
4. Высшая математика для экономистов : учебник для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман ; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – [2-е изд., перераб. и доп.] – Москва : ЮНИТИ, 2001. – 471 с.
5. Гусак А. А. Справочное пособие по решению задач: математический анализ / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 1998. – 228 с.
6. Долгіх В. М. Вища математика для економістів : практикум : у 4 ч. / В. М. Долгіх, Т. І. Малютіна, К. А. Дахер ; Державний вищий навчальний заклад «Українська академія банківської справи Національного банку України». – Суми : ДВНЗ «УАБС НБУ», 2009. – Ч. 3. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння. Ряди. – 129 с.
7. Коваленко Л. Б. Вища математика для менеджерів : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 292 с. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/17538/

8. Колосов А. І. Вища математика для економістів: у 2-х модулях: конспект лекцій (для студентів 1 курсу денної форми навчання за напрямами підготовки 6.030504 «Економіка підприємства» і 6.030509 «Облік і аудит») / А. І. Колосов, А. В. Якунін, Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2014. – 237 с. – Режим доступу :

Модуль 1 : http://eprints.kname.edu.ua/35973/.

Модуль 2 http://eprints.kname.edu.ua/40510/.

9. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики / Укл. : Г. А. Кузнецова, С. Н. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 106 с. – Частина 1. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/39383/.

10. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики / Укл. : Г. А. Кузнецова, С. Н. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – 142 с. – Частина 2. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/42486/.

11. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : для втузов. / Н. С. Пискунов. – [13-е изд.] – Москва : Наука, 1985. – Том 1. – 432 с.

12. Програма нормативної навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 241 – Готельно-ресторанна справа. /Укл. : Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017 р. – 10 с.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Елементарні перетворення матриць. Поняття про ранг матриці. Теорема Кронекера – Капеллі

Виділимо в матриці A розміру $m \times n$ будь-які k рядків і k стовпців $\left(1 \le k \le \min\{m, n\}\right)$. Визначник, складений з елементів, які стоять на перетині виділених рядів, називається *мінором* M_k k-го порядку матриці A.

Рангом $rank\, A$ матриці A розміру $m \times n$ називається найбільший порядок відмінного від нуля мінору цієї матриці.

Зрозуміло, що

$$0 \le rank\, A \le \min\{m, n\},$$

причому ранг дорівнює нулю тільки для нульової матриці.

Базисним мінором матриці A називається довільний відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці.

Мінор M_{k+1} $(k+1)$-го порядку, який містить у собі деякий мінор M_k k-го порядку, називається *обвідним* для цього мінору M_k.

Теорема 1. Якщо в матриці A існує відмінний від нуля мінор $M_r \neq 0$ r-го порядку, а всі його обвідні мінори M_{r+1} $(r+1)$-го порядку дорівнюють нулю, то число r є рангом матриці A. (Без доведення).

Метод обвідних мінорів знаходження рангу матриці

A розміру $m \times n$ складається з таких кроків:

1) Покласти $k := 0$.

2) Обчислити почергово обвідні мінори M_{k+1} $(k+1)$-го порядку. Якщо деякий мінор M_{k+1} відмінний від нуля, то прийняти його за базисний і перейти до кроку 3). Якщо всі обвідні мінори $(k+1)$-го порядку дорівнюють нулю, то перейти до кроку 4).

3) Покласти $k := k+1$. Якщо $k = \min\{m, n\}$, то перейти до кроку 4). У протилежному випадку перейти до кроку 2).

4) Покласти $rank\, A = k$ і закінчити обчислення.

Приклад 1. Знайти ранг даної матриці A методом обвідних мінорів і вказати її базисний мінор

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -6 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. $k = 0$; $M_1 = 1 \neq 0$; $k = 1$;

$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0$; $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$; $k = 2$;

$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -6 & 5 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0$; $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 7 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$;

$rank\, A = 2$; $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$ – базисний мінор.

Елементарними перетвореннями матриці називаються наступні операції:

1) переставлення місцями будь-яких двох пара-

лельних рядів;

2) множення елементів будь-якого ряду на довільне ненульове число;

3) додавання до всіх елементів будь-якого ряду відповідних елементів будь-якого іншого паралельного йому ряду, помножених на одне і те ж довільне число.

Дві матриці A і B називаються еквівалентними, якщо одну з них можна одержати з іншої за допомогою елементарних перетворень. Позначається $A \sim B$.

Теорема 2. Еквівалентні матриці мають один і той же ранг

$$A \sim B \;\Rightarrow\; rank\, A = rank\, B\,.$$

Іншими словами, елементарні перетворення не змінюють рангу матриці. (Без доведення).

Метод елементарних перетворень знаходження рангу матриці полягає у зведені даної матриці A розміру $m \times n$ за допомогою елементарних перетворень рядків і переставлення стовпців до еквівалентної східчастої *верхнє трапецієвидної* (зокрема, *верхнє трикутної)* матриці $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{a}_{12} & \ldots & \widetilde{a}_{1r} & \widetilde{a}_{1(r+1)} & \ldots & \widetilde{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & \widetilde{a}_{2r} & \widetilde{a}_{2(r+1)} & \ldots & \widetilde{a}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \widetilde{a}_{1(r+1)} & \ldots & \widetilde{a}_{rn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

в якій ненульові діагональні елементи дорівнюють одиниці.

Ранг трапецієвидної матриці $\widetilde{A}$ дорівнює числу r її ненульових рядків.

Тоді $rank\, A = rank\, \widetilde{A} = r$.

За базисний мінор $\widetilde{M}_r$ трапецієвидної матриці $\widetilde{A}$ можна взяти кутовий мінор

$$\widetilde{M}_r = \begin{vmatrix} 1 & \widetilde{a}_{12} & \dots & \widetilde{a}_{1r} \\ 0 & 1 & \dots & \widetilde{a}_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Приклад 2. Знайти ранг даної матриці A методом елементарних перетворень

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Для зручності поміняємо місцями перший та другий стовпці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & -6 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & -6 & -3 & 5 \\ -6 & 9 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

помножимо перший рядок на (-5) та додамо до другого рядка, потім перший рядок помножимо на 6 й додамо до третього, в результаті отримаємо матрицю. Зауважте, що перший рядок при цьому залишається без змін.

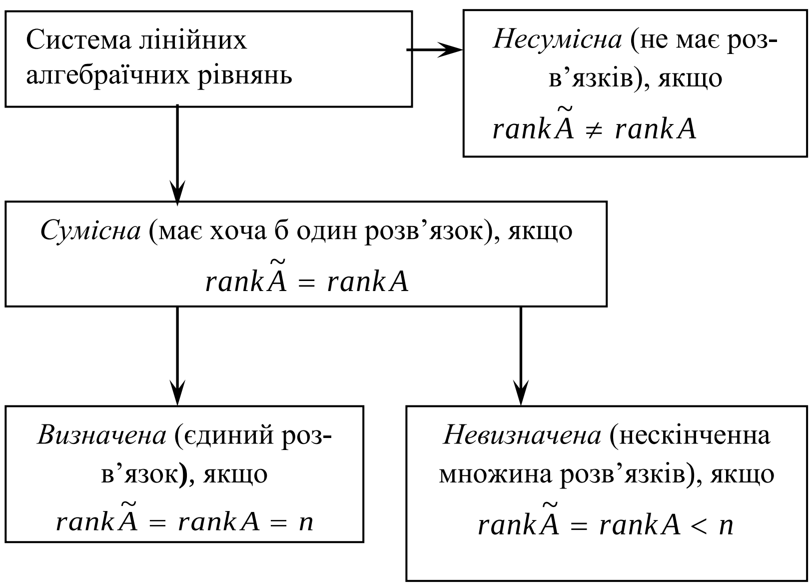
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 9 & 7 & 15 \\ 0 & -9 & -7 & -15 \end{pmatrix} \sim$$

Додамо другий рядок до третього, не змінюючи другий

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -3 & -2 & -2\\ 0 & 9 & 7 & 15\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -3 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 7/9 & 5/3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix};$$

$rank\,A = r = 2$, де R_i – i-й рядок; S_j – j-й стовпець.

Теорема Кронекера – Капеллі. Система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими $A\cdot X = B$ сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці $\widetilde{A}$ дорівнює рангу основної матриці A: $rank\,\widetilde{A} = rank\,A = r$. У випадку сумісності: 1) якщо ранг цих матриць дорівнює числу невідомих $r = n$, то система має єдиний розв’язок (є визначеною); 2) якщо цей спільний ранг менше числа невідомих $r < n$, то система є невизначеною і має безліч розв’язків, які залежать від $n - r$ довільних сталих (параметрів). (Без доведення)



Оскільки розширена матриця $\widetilde{A}$ включає в себе основну матрицю A, то $rank\ A \leq rank\ \widetilde{A}$. Розширена матриця C одержана з основної матриці A доданням тільки одного стовпця, тому $rank\ \widetilde{A} \leq rank\ A + 1$.

Нехай система сумісна ($rank\ \widetilde{A} = rank\ A = r$) і M_r – деякий (довільно вибраний) базисний мінор її основної матриці A.

Якщо залишити в системі тільки всі ті рівняння, частина коефіцієнтів яких входить в базисний мінор, то одержана система буде рівносильна початковій.

Якщо сумісна система є невизначеною ($rank\ \widetilde{A} = rank\ A = r < n$), тоді лише ті r невідомі x_j, коефіцієнти при яких входять у вибраний базисний мінор M_r, називаються *базисними*, а решта $n - r$ невідомі x_j називаються *вільними*.

Залишимо в системі тільки всі ті рівняння, частина коефіцієнтів яких увійшла в базисний мінор, і перенесемо вправо всі члени з вільними невідомими. Розглядаючи вільні невідомі як довільні сталі (параметри), одержуємо квадратну систему r-го порядку відносно базисних невідомих, визначником якої служить базисний мінор M_r. Оскільки $M_r \neq 0$, то базисні невідомі знаходяться однозначно. Таким чином, отримуємо *загальний розв'язок* початкової системи. При довільно вибраних фіксованих значеннях вільних невідомих (параметрів) одержуємо *частинний розв'язок*. Частинний розв'язок, який відповідає нульовим значенням вільних невідомих, називається *фундаментальним розв'язком*.

Приклад 3. Переконатися, що дана система

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

сумісна і невизначена. Користуючись методом Крамера, знайти її загальний розв'язок і виділити з нього фундаментальний розв'язок.

Розв'язання. Для знаходження рангу використовуємо метод обвідних мінорів.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}; \quad rank\, A = 2; \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

– базисний мінор.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}; \quad rank\, \widetilde{A} = 2 .$$

Оскільки $rank\, A = rank\, \widetilde{A} = r = 2 < n = 3$, то система сумісна і невизначена.

Приймаємо x_2 і x_3 – базисні невідомі (відповідають стовпцям базисного мінору), а x_1 – вільне невідоме (відповідає стовпцю, що не входить у базисний мінор). Нехай $x_1 = C_1$, де C_1 – довільна стала (параметр). Залишаємо в системі тільки перше та друге рівняння, що відповідають рядкам базисного мінору. Переносимо члени з вільним невідомим $x_1 = C_1$ вправо. Одержану квадратну систему відносно базисних невідомих x_2 і x_3 розв'язуємо методом Крамера.

$$x_1 = C_1 \ ; \quad \begin{cases} x_2 + 2x_3 = 3 - 3C_1 \\ 2x_2 - x_3 = 1 - 6C_1 \end{cases} ; \quad \Delta = M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \ ;$$

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 3 - 3C_1 & 2 \\ 1 - 6C_1 & -1 \end{vmatrix} = 15C_1 - 5 \ ; \quad \Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 - 3C_1 \\ 2 & 1 - 6C_1 \end{vmatrix} = -5 \ ;$$

$$x_2 = \frac{\Delta^{(1)}}{\Delta} = \frac{15C_1 - 5}{-5} = -3C_1 + 1; \quad x_3 = \frac{\Delta^{(2)}}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1 \ .$$

Отже, $x_1 = C_1$; $x_2 = 1 - 3C_1$; $x_2 = 1$, $C_1 \in R$

– загальний розв'язок.

Покладемо $x_1 = C_1 = 0$. Тоді $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_2 = 1$ – фундаментальний розв'язок.

ДОДАТОК Б

Визначення односторонніх границь функції

Односторонньою границею в математичному аналізі вважають наближення до граничного значення з однієї сторони. Так існують границя праворуч та границя ліворуч.

Згідно означення Коши, маємо такі формулювання для понятть односторонніх границь.

Число A називають *границею праворуч* для функції $y = f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться відповідне додатне число σ, таке, що для всіх точок x з інтервалу $(x_0; x_0 + \sigma)$ справедлива нерівність $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$.

Число A називають *границею ліворуч* для функції $y = f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться відповідне додатне число σ, таке, що для всіх точок x з інтервалу $(x_0 - \sigma; x_0)$ справедлива нерівність $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$.

ДОДАТОК В

Порівняння нескінченно малих величин

Щоб порівняти дві нескінченно малі величини потрібно знайти границю відношення цих нескінченно малих величин. Якщо ця границя не існує, то такі величини порівняти неможливо.

1. Дві нескінченно малі величини $\alpha(x)$ та $\gamma(x)$ називають нескінченно малими одного порядку, якщо границя їх відношення відрізняється від нуля

$$\lim \frac{\alpha}{\gamma} = a, (a \neq 0) .$$

2. Величина α називається нескінченно малою вищого порядку в порівнянні з γ, якщо границя відношення цих величин дорівнює нулю

$$\lim \frac{\alpha}{\gamma} = 0 .$$

3. Величина α називається нескінченно малою нижчого порядку в порівнянні з γ, якщо границя відношення цих величин є величиною нескінченно великою

$$\lim \frac{\alpha}{\gamma} = \infty .$$

4. Дві нескінченно малі величини α і γ називають еквівалентними, якщо границя їх відношення дорівнює одиниці

$$\lim \frac{\alpha}{\gamma} = 1 .$$

Позначають це так $\alpha \sim \gamma$.

Еквівалентні нескінченно малі величини мають такі властивості, як:

- різниця двох еквівалентних нескінченно малих величин є величина нескінченно мала вищого порядку в порівняння з кожною із них;
- під час знаходження границі відношення двох нескінченно малих величин можна кожну з них замінити на іншу нескінченно малу, яка їй еквівалентна, тобто, якщо $\alpha \sim \alpha_1$, $\gamma \sim \gamma_1$, то

$$\lim \frac{\alpha}{\gamma} = \lim \frac{\alpha_1}{\gamma} = \lim \frac{\alpha}{\gamma_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\gamma_1}.$$

Приклад. Порівняти $y_1 = 2x^3$ та $y_2 = x$ при $x \to 0$.

Розв'язання. Знайдемо границю відношення заданих функцій $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^3}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2}{1} = 0$. Тож y_1 це величина нескінченно мала вищого порядку в порівнянні з y_2.

Таблиця еквівалентних нескінченно малих величин

$\sin x \sim x$
$tgx \sim x$
$e^x - 1 \sim x$
$a^x - 1 \sim x \ln a$
$\ln(1+x) \sim x$
$arctgx \sim x$
$\arcsin x \sim x$

ДОДАТОК Г

Функція в економіці

Приклад 1. Попит і ціна – взаємозалежні величини. За певних умов попит на деякий товар є *функцією ціни*. Нехай q – попит на товар, p – ціна товару. Залежність між попитом і ціною називають *функцією попиту* $q = f(p)$. Функції попиту можуть бути найрізноманітнішими, скажімо

$$q = \frac{400}{p+3}; \quad q = ae^{-2p}, \quad \text{де } a = const.$$

Приклад 2. Залежність між ціною і попитом можна розглядати *як функцію ціни від попиту* $p = \varphi(q)$. Це може бути залежність $p = \ln\sqrt{\frac{5}{q}}$.

Приклад 3. Нехай відома функція ціни p від попиту q. Якщо реалізовано q одиниць певного товару, то добуток $q \cdot p$ (кількості одиниць товару на його ціну) є сумарний виторг, або, як його ще називають, *функція сумарного виторгу*: $u = qp = q\varphi(q)$. Наприклад, якщо залежність ціни від попиту подається у вигляді $p = \frac{400}{q+4}$, то функція сумарного виторгу буде така: $u = \frac{400q}{(q+4)}$.

Приклад 4. Відомо, що пропозиція деякого товару залежить від його ціни. Якщо через p позначити ціну, а через S – пропозицію, то функція $S = f(p)$ називається *функцією пропозиції*. Навпаки, кожній пропозиції S відповідає певна ціна. Тоді залежність $p = q(S)$ є *функцією ціни від пропозиції.*

Приклад 5. Функція, яка описує залежність між витратами на виробництво певного товару та виробленою його кількістю, тобто обсягом виробництва, називається *функцією витрат.* Якщо через К позначити сумарні витрати з виробництва х одиниць товару, то *функцію сумарних витрат* можна записати у вигляді $K = f(x)$.

Функція $\Pi = \frac{\mathrm{K}}{x} = \frac{f(x)}{x}$ називається *функцією середніх витрат.*

ДОДАТОК Д

Похідні та диференціал вищих порядків

Нехай функція $f(x)$ диференційована на проміжку $(a;b)$. Похідна цієї функції $f'(x)$ є функцією аргументу x. Візьмемо деяку точку $x_0 \in (a;b)$. Дамо приріст аргументу $\Delta x = x - x_0$ і матимемо приріст функції $f'(x)$ у точці x_0:

$$\Delta f'(x_0) = f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0).$$

Розглянемо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\Delta f'(x_0) / \Delta x\right) = f''(x_0)$.

Якщо ця границя існує, то кажуть, що функція $f(x)$ має *похідну другого порядку* (*другу похідну*) у точці x_0. Її позначають $y'' = f''(x_0)$, або $d^2 f(x_0) / dx^2$, або $f''(x)\big|_{x=x_0}$.

Похідну $f'(x)$ називають *похідною першого порядку* (*першою похідною*), а саму функцію $f(x)$ вважають *похідною нульового порядку* (*нульовою похідною*).

Отже, друга похідна – це похідна від першої похідної

$$y'' = (y')'.$$

Аналогічно визначають похідні третього і наступних порядків: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

Приклад. Знайти y''', якщо $y = \sin^6 2x$.

Розв'язання. Послідовно знайдемо y', y'', y''':

$$y' = 12\sin^5 2x \cos 2x;$$

$$y'' = \left(12\sin^5 2x\cos 2x\right)' = 12\cdot\left(-10\sin^4 2x\cos 2x\times\right.$$
$$\left.\times\cos 2x - \sin^5 2x\cdot\sin 2x\right) = -120\sin^4 2x\cos^2 2x - 12\sin^6 2x;$$
$$y''' = \left(-120\sin^4 2x\cos^2 2x - 12\sin^6 2x\right)' = -120\cdot\left(8\cdot\sin^3 2x\cdot\cos 2x\cdot\cos^2 2x + \right.$$
$$\left.-\sin^4 2x\cdot 2\sin 2x\cdot\cos 2x\right) - 12\cdot 6\cdot\sin^5 2x\cos 2x\cdot 2 =$$
$$= -960\sin^3 2x\cos^3 2x + 96\sin^5 2x\cos 2x.$$

Диференціал від диференціалу функції називають *другим диференціалом* (*диференціалом другого порядку*) цієї функції і позначають через d^2y:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2.$$

Аналогічно визначаються диференціали третього і наступних порядків. *Диференціалом* n*-го порядку* називається перший диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) = \left(f^{(n-1)}(x)\cdot dx^{n-1}\right)'\cdot dx =$$

$$= \left(f^{(n-1)}(x)\right)'\cdot dx^{n-1}\cdot dx = f^{(n)}(x)\cdot dx^n.$$

Зауваження. Диференціали другого і вищих порядків властивості інваріантності форми не мають.

Користуючись поняттям диференціалу, похідну другого і вищих порядків можна подати як відношення диференціалів відповідного порядку $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \ y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ при умові, що x – незалежна змінна.

ДОДАТОК Е

1	$d(u+v)=du+dv$	4	$d(uv)=vdu+udv$
2	$d(u-v)=du-dv$	5	$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$
3	$d(Cu)=Cdu$	6	$dy=y'_u\,du\ ,\quad y=f\big(u(x)\big)$
Основні диференціали			
1	$dC=0$	5	$d(\sin u)=\cos u\ du$
2	$d\left(u^{\alpha}\right)=\alpha u^{\alpha-1}du$	6	$d(\cos u)=-\sin u\ du$
2а	$d(au+b)=a\ du$	7	$d(tg\,u)=\frac{du}{\cos^2 u}$
2б	$d\left(au^2+bu+c\right)=$ $=(2au+b)\ du$	8	$d(ctg\,u)=-\frac{du}{\sin^2 u}$
2в	$d\left(\sqrt{u}\right)=\frac{du}{2\sqrt{u}}$	9	$d(\arcsin u)=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
3	$d(\ln u)=\frac{du}{u}$	10	$d(\arccos u)=-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
4	$d\left(a^u\right)=a^u\ln a\ du$	11	$d(arctgu)=\frac{du}{1+u^2}$
4а	$d\left(e^u\right)=e^u\ \ du$	12	$d(arcctgu)=-\frac{du}{1+u^2}$

ДОДАТОК Ж

Функція Кобба – Дугласа

Виробнича функція Кобба – Дугласа (Cobb – Douglas production function) – це модель, яка демонструє залежність об'єму виробництва (Q) від факторів, що створюють це виробництво – праця (L) та капітал (K). Іноді цю функцію називають функцією корисності.

Вперше ця функція була запропонована Кнутом Вікселем, але її перевірка відбулася лише у 1928 році завдяки американським економістам Чарльзу Коббі та Полу Дугласу.

Ця функція має вигляд

$$Q = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta},$$

де A – технологічний коефіцієнт; L – частка праці; K – частка капіталу; α – коефіцієнт еластичності праці; β – коефіцієнт еластичності капіталу.

Тож, якщо функція Кобба – Дугласа задана $Q = L^{0,73} \cdot K^{0,27}$, то зрозуміло, що в виробництві деякої продукції (або послуги) частка праці складає 73%, а частка капіталу 27%, технологічний коефіцієнт $A = 1$.

Навчальне видання

СИТНИКОВА Юлія Валеріївна

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

(для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання спеціальності 241 – Готельно-ресторанна справа)

Відповідальний за випуск *А. В. Якунін*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *Ю. В. Ситникова*

План 2017, поз. 110 Л

Підп. до друку 05.09.2017 р. Формат 60х84/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 6,3
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017 р.